

|                                                                                                                          |  |                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p> ONTÜSTIK-KAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p> <br/> SOUTH KAZAKHSTAN<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                    |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                              |
| Методические рекомендации                                                                                                |  | Стр. 1 из 116 стр.                                                                                                                                                                                         |

**Медицинский колледж при  
АО «Южно-Казахстанской медицинской академии»**

**Кафедра общее образовательных дисциплин**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ  
ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

Код дисциплины: ООД 04

Дисциплина: Математика

Специальность: 09120100 «Лечебное дело»

Квалификация: 4S09120101 «Фельдшер»

Специальность: 09130100 «Сестринское дело»

Квалификация: 4S09130103 «Медицинская сестра общей практики»

Специальность: 09110100 «Стоматология»

Квалификация: 4S09110102 «Дантист»

Специальность: 09110200 «Ортопедическая стоматология»

Квалификация: 4S09110201 «Зубной техник»

Объем учебных часов/кредитов: 120/5

Курс: 1

Семестр: 1

Форма контроля: экзамен

|                                                                                                                          |  |                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p> <br/> SOUTH KAZAKHSTAN<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                    |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                              |
| Методические рекомендации                                                                                                |  | Стр. 1 из 116 стр.                                                                                                                                                                                         |

Обсужден на заседании кафедры «Общеобразовательных дисциплин»

Протокол № 13 «27» 06 2023 г.

Заведующий кафедрой:  Сатаев А.Т.

|                                                                                                       |                                                                                   |                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/>MEDISINA<br/>AKADEMIASY<br/>«Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ</p> |  | <p>SOUTH KAZAKHSTAN<br/>MEDICAL<br/>ACADEMY<br/>АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»</p> |
| <p>Кафедра общеобразовательных дисциплин<br/>Методические рекомендации</p>                            |                                                                                   | <p>044-73/11-228<br/>Стр. 1 из 116 стр.</p>                                                      |

## Занятие № 1

### 5.1. Тема: Уравнение.

- **Количество учебных часов: 135 мин**      **3**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

### 5.2. Цель занятия занятия:.

- **образовательная:** дать определение уравнению, его корням, равносильности уравнений; ознакомить учащихся с видами уравнений и их свойствами.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность, умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научить применять знания, полученные при изучении данной темы для решения прикладных задач.

### 5.3. Задачи обучения.

- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятии
  - б) определение целей и задач занятия
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов
- **Объяснение новой темы: 40 мин**

#### Уравнение. Корень уравнения.

#### Равносильность уравнения. Свойства уравнений.

Определение: Равенство двух функций называется уравнением. Обозначение:  $f(X)=G(X)$

Например:  $2x+1=x+7$  является уравнением. Это уравнение не превращается в тождество при любых значениях  $x$ , а только при  $x=6$ .

Определение: Решением уравнения называются значения переменной, которые при подстановке их в уравнение, обращают уравнение в верное числовое равенство.

Решить уравнение – значит найти все решения этого уравнения.

Выражение, стоящее слева от знака равенства называется левой частью и аналогично, выражение стоящее справа от знака равенства, называется правой частью уравнения.

Определение: Если 2 или более уравнения имеют одинаковые корни, то они называются равносильными уравнениями.

Например  $x+2=5$  и  $x+5=8$  имеют одинаковый корень, поэтому они равносильные

#### Свойства уравнений.

1. Если к обеим частям уравнения прибавить какое-то число или определенное в числовой области многочлен, то получится уравнение, равносильное данному уравнению. Прибавляемый многочлен не должен изменять области определения уравнения.

Например Дано уравнение  $5x+7=22$ . Решение  $x=3$ . Если к обеим частям этого уравнения прибавить  $(-7)$ , то  $5x=22-7$ ,  $5x=15$ ,  $x=3$ , т.е. корень тоже будет  $x=3$ , соответственно полученное уравнение будет равносильно данному уравнению.

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на число не равное нулю, то получится уравнение равносильное данному уравнению.

Например  $6x+7=31$ ,  $x=4$ . Если обе части уравнения умножить на  $1/3$ , то  $2x+7/3=31/3$  и  $x=4$ . Эти два уравнения имеют одинаковый корень, значит, они равносильны.

3. Обе части уравнения можно возвести в одну и ту же степень или взять под один и тот же корень.

4. Обе части уравнения нельзя разделить и умножить на искомую переменную. Если разделим, то потеряем корень, а если умножим, то приобретем посторонний корень.

## Линейные уравнения, квадратные уравнения и приводимые к ним.

### Дробнорациональные уравнения.

**Определение:** Уравнение называется линейным, если обе части этого уравнения являются линейными функциями неизвестной, т.е.  $ax+b=cx+d$

В уравнение могут входить 1,2,3 или более неизвестных.

Например:  $3x-4=7x$ ,  $x+6=8x$ , - линейные уравнения с одним неизвестным.

Найдем решение уравнения:

$$5(x+2)+8(x+4)=7x+108,$$

$$10x-8x=33-19,$$

$$2x-14, x=7.$$

Итак, общий вид решения линейного уравнения будет такой:

$$ax-cx=d-b, x(a-c)=d-b, x=(d-b)/(a-c) (a \neq c)$$

Дробнорациональные уравнения.

Например:  $\frac{1}{4}x + \frac{3}{8} = 0$

Решение: 3-й метод

$$\left( \frac{1}{4}x + \frac{3}{8} = 0 \right) \Leftrightarrow \left( -x = -\frac{3}{8} \right) \Leftrightarrow \left( x = -\frac{3}{8} : - \right) \Leftrightarrow x = -1,5$$

2-метод  $\left( \frac{1}{4}x + \frac{3}{8} = 0 \right) \Leftrightarrow (2x + 3 = 0) \Leftrightarrow (2x = -3) \Leftrightarrow x = -1,5$  Ответ:  $\{-1,5\}$

**Определение:** Уравнение вида:  $ax^2+bx+c=0$  здесь  $a \neq 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , называется квадратным уравнением

Решение этого уравнения находится с помощью дискриминанта:  $D=b^2-4ac$

1. Если  $D < 0$ , то уравнение не имеет корней

2. Если  $D = 0$ , то уравнение имеет один корень

3. Если  $D > 0$ , то уравнение имеет 2 различных корня:

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad X_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad X_1 + X_2 = \frac{-b}{a}, \quad X_1 \cdot X_2 = \frac{c}{a}$$

Например: а)  $x^2-3x+2=0$ ,  $D=(-3)^2-4 \cdot 2 \cdot 1=9-8=1$

$$X_1 = \frac{-(-3)+1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2, \quad X_2 = \frac{-(-3)-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{Решение } \{2, 1\}$$

б)  $x^2+x+1=0$ .  $D=1^2-4 \cdot 1 \cdot 1=-3 < 0$  уравнение не имеет корней

в)  $x^2-8x+16=0$ .  $D=64-4 \cdot 1 \cdot 16=0$   $X_1 = X_2 = \frac{-8}{2} = -4$ . Решение  $\{-4\}$

## 5.4. Основные вопросы темы.

1. Какие уравнения называются равносильными?
2. Что называется решением уравнения?
3. Какие уравнения называются иррациональными?
4. Как записывается общий вид линейного уравнения?
5. Что называется квадратным уравнением?
6. Сколько решений имеют квадратные уравнение?

|                                                                                                                                                      |  |                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> ONTÜSTIK-KAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/> -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                                                                 |
| Методические рекомендации                                                                                                                            |  | Стр. 1 из 116 стр.                                                                                                                                                                                                                            |

- ответы на вопросы по новой теме;
  - решение задач;
  - работа с карточками заданий;
  - выполнение тестовых заданий
- Основная:

### 5.5. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты,задачи и тд.) 10 мин

- а) оценивание учащихся
- б) задание на дом

### Занятие № 2

#### 5.1. Тема: Неравенство.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:** дать определение неравенству и решению неравенств; ознакомить учащихся с свойствами неравенств.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научить учащихся применять умения, сравнивать и делать выводы при решении задач спецдисциплин.

- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятии
  - б) определение целей и задач занятия
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов

#### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

#### **Неравенства. Решение неравенств, свойства неравенств.**

Определение: Выражения, записанные в виде:  $a < d$ ,  $a \leq d$ ,  $a > b$ ,  $a \geq b$ , где  $a$ ,  $b$  –числа, числовые выражения или функции, называются неравенствами

Неравенства с знаками  $<$  или  $>$  являются строгими; а с знаками  $\leq$  или  $\geq$  простыми неравенствами

Неравенства делятся на числовые и неравенства с одной переменной.

Например:  $5 < 10$ - числовое неравенство;  $2x \geq 3$  - неравенство с одной переменной

Определение: Значения неизвестной, при которых неравенство обращается в верное числовое неравенство называется решением неравенства .

|                                                                                                                                                                                   |  |                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>         «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ       </p> |  |  <p style="text-align: center;"> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>         АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»       </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                             |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                         |  | Стр. 1 из 116 стр.                                                                                                                                                                                                                                             |

**Определение:** Решить неравенство это значит найти те значения неизвестной, при которых неравенство обращается в верное числовое неравенство

**Определение:** Неравенства, множество решений которых совпадают называются равносильными.

Свойства неравенств

1. неравенства  $f(x) > g(x)$  и  $f(x) - g(x) > 0$  равносильные
2. неравенства  $f(x) > g(x)$  и  $f(x) + a > g(x) + a$  равносильные
3. неравенства  $f(x) > g(x)$  и  $a f(x) > a g(x)$  при  $a > 0$  равносильные
4. неравенства  $f(x) > g(x)$  и  $a f(x) < a g(x)$  при  $a < 0$  равносильные

**Следствие:** Члены неравенства можно переносить из одной части неравенства в другую поменяв знак на противоположный.

Неравенство с дробным коэффициентом можно преобразовать в неравенство с целым коэффициентом. Неравенство можно умножить на выражение с неизвестной переменной.

**Определение:** Неравенства вида  $ax + b > 0$ ,  $ax + b \geq 0$ , или  $ax + b < 0$ ,  $ax + b \leq 0$ , называются линейными неравенствами, здесь  $a$  и  $b$  - действительные числа.

Если  $a > 0$ , то  $ax + b > 0$ ,  $x > -b/a$

Если  $a < 0$ , то  $ax + b < 0$ ,  $x < -b/a$

Например:  $5x + 3 > 0$ ,  $5x > -3$ ,  $x > -3/5$

Решите неравенства:  $(x + 4) > 2(3x) \Leftrightarrow (4x > -2) \Leftrightarrow (x > -0,5)$ .  $(0,5; +\infty)$

**Определение:** Неравенства вида  $ax^2 + bx + c > 0$ ,  $ax^2 + bx + c \geq 0$ ,  $ax^2 + bx + c < 0$ ,  $ax^2 + bx + c \leq 0$ , называются квадратными неравенствами.

Их решение связано с значением коэффициента  $a$  и дискриминанта  $D = b^2 - 4ac$

Например:

1)  $-2x^2 + 3x - 6 < 0$ ,  $2x^2 - 3x + 6 > 0$ ,  $D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 9 - 48 = -39 < 0$

2)  $5x^2 + 9x - 2 < 0$ ,  $D = 81 - 4 \cdot (-2) \cdot 5 = 121 > 0$

3)  $5x^2 + 9x - 2 < 0$ ,  $D = 81 - 4 \cdot (-2) \cdot 5 = 121$ ,  $x_1 = \frac{-9 + 11}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ,  $x_2 = \frac{-9 - 11}{10} = -2$

#### 5.4. Основные вопросы темы. 25 мин

- Закрепление пройденного материала;
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 4.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

1. Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
2. А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
3. А.Ш, Алимов, Ю.М. Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
4. Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
5. А.С. Атанасьян, В.Ф. Бутузов, Ц.Б. Кадонцев. Геометрия (базовый профильный уровень). М. Просвещение, 2018.

|                                                                                                                                                                                   |                                                                                   |                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>         «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ       </p> |  | <p style="text-align: center;"> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>         АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»       </p> |
| <p style="text-align: center;">Кафедра общеобразовательных дисциплин<br/>Методические рекомендации</p>                                                                            |                                                                                   | <p style="text-align: center;">044-73/11-228<br/>Стр. 1 из 116 стр.</p>                                                                                                      |

Учебник. М. Просвещение, 2012

### 5.7. Контроль (вопросы, тесты, задачи и т.д.) 10 мин

1. Что называется неравенством?
2. Что называется решением неравенства?
3. Что такое линейные неравенства?
4. Что называется квадратным неравенством?
5. Какие свойства неравенств вы знаете?
6. Чем отличается решение уравнения от решения неравенства ?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

### Занятие № 3

#### 5.1. Тема: Определители II и III порядков.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:

- **образовательная:** научить учащихся способам решения систем двух линейных уравнений с формулами Крамера.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научить учащихся применять способы решения систем уравнений.
- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятии
  - б) определение целей и задач занятия
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов

#### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

#### Определители II и III порядков.

#### Решение систем двух (трех) уравнений по формуле Крамера.

Определение 1. Системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными называется система вида 
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1), \text{ где } a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 - \text{заданные действительные числа, } x, y - \text{неизвестные переменные.}$$

Определение 2. Решением системы (1) называется пара чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющие каждое уравнение системы

#### Способы решения системы уравнений

##### 1. Способ алгебраического сложения.

Например: Нужно решить систему двух следующих уравнений  $2x+3y=7$  (1),  $3x-y=16$  (2). Умножим второе уравнение системы на 3, полученное уравнение равносильное уравнению (2). Тогда  $2x+3y=7$  (1)  $9x-3y=48$  (3) уравнения системы будут равносильными первоначальной системе. В уравнениях коэффициенты при  $y$  одинаковые, а знаки противоположные. Поэтому при почленном сложении уравнения (1) и (3) переменная  $y$  уничтожается и получается уравнение с одной переменной  $11x=55$  (4). Теперь напомним новую систему равносильную данной.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 11x = 55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 5 + 3y = 7 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = -3 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 5 \end{cases}$$

## 2. Способ замены переменной.

Решим данную систему: 
$$\begin{cases} x - 3y = 10 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow 3(3y + 10) - 2y = 2 \Rightarrow y = -4$$

Если найдем значение X из уравнения (1) и подставим во второе, то получим Y=-4. Поэтому решение системы будет (-2;-4)

## 3. Способ введения новой переменной.

Нужно решить систему 
$$\begin{cases} \frac{1}{\frac{x+y}{3}} + \frac{1}{\frac{x-y}{4}} = 2 \\ \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-y} = 7 \end{cases}.$$

Для решения системы введем обозначения  $\frac{1}{x-y} = u$  и  $\frac{1}{x+y} = v$ , тогда  $u+v=2$ ,

$3u+4v=7$ . Воспользуемся одним из двух предыдущих методов и решим последнюю систему.

Получим  $u=1$ ,  $v=1$ . Подставим значения  $u$  и  $v$  в систему и получим  $\frac{1}{x-y} = u$ ,  $\frac{1}{x+y} = v$ ,

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow x=1 \quad y=0$$

## 4. Применение правила Крамера.

Таблица составленная из коэффициентов при неизвестных  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  называется **главным определителем**. Здесь (a,b);(c,d)-строки; (a,c),(b,d)-столбцы. Определитель вычисляется по формуле  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$ .

Решим систему  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$  с помощью правила Крамера

Найдем главный определитель системы:  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ . Затем вычислим

вспомогательные определители  $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$   $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$ .

**Теорема:** Если главный определитель системы (1) не равен нулю  $\Delta \neq 0$ , тогда такая система совместна и имеет единственное решение и находится по формуле  $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ ;  
 $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ .

Решим систему  $\begin{cases} 18x + 25y = 498 \\ 27x + 10y = 417 \end{cases}$  с помощью правила Крамера

Главный определитель  $\Delta = \begin{vmatrix} 18 & 25 \\ 27 & 10 \end{vmatrix} = 180 - 675 = -495$

Вспомогательные определители  $\Delta_x = \begin{vmatrix} 498 & 25 \\ 417 & 10 \end{vmatrix} = 4980 - 10425 = -5445,$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 18 & 498 \\ 27 & 417 \end{vmatrix} = 18 \cdot 417 - 27 \cdot 498 = -5940,$

Находим значение неизвестных  $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-5445}{-495} = 11$        $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-5940}{-495} = 12$

Таким образом, решение системы (11;12)

#### 5. Графический способ.

Например: Дана система  $\begin{cases} 4x - y = 5 & (1) \\ 3x + 2y = 12 & (2) \end{cases}$

|                                                                                                                                                      |  |                                                                                                                                                                                                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/> 1979<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                                                               |
| Методические рекомендации                                                                                                                            |  | Стр. 1 из 116 стр.                                                                                                                                                                                                                          |

Построим графики данных уравнений. График первого уравнения(1) прямая АВ, проходящая через точки А(0,-5) и В(5/4, 0) График уравнения( 2) прямая CD, проходящая через точки С(0,6) и D(4,0) Решением системы является координаты точки пересечения прямых АВ, CD, т.е. М( 2,3).

Таким образом,

- а) если система имеет единственное решение, то прямые пересекаются;
- б) если система имеет множество решений, то прямые совпадают;
- в) если система не имеет решения, то прямые параллельны.

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) : 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш.Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Какие методы применяются для решения уравнений?
  2. Что такое способ алгебраического сложения?
  3. Что такое способ введения новой переменной?
  4. Что называется определителем?
  5. Что называются главным и вспомогательным определителем в применении правила Крамера?
- а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

#### Занятие № 4

#### 5.1. Тема: Функции и графики функций. Обратная функция

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:** дать понятие учащимся о функции, ознакомить со способами задания функции, научить строить графики.
- **воспитательная:** выработать навыки анализа, логического построения понятий.
- **развивающая:** научить учащихся видеть зависимости между различными величинами.

- **Организационный момент: 10 мин**

|                                                                                                                                                      |  |                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/> -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                                                                 |
| Методические рекомендации                                                                                                                            |  | Стр. 1 из 116 стр.                                                                                                                                                                                                                            |

а) организация рабочей обстановки на занятий

б) определение целей и задач занятия

• **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

а) проверить уровень базовых знаний студентов

### 5.3. Задачи обучения.

• **Объяснение новой темы: 40 мин**

**Числовая функция. Способы задания функции,  
простейшие преобразования функции и графиков функций.**

Определение: Числовой функцией  $f$  называется соответствие двух множеств  $D$  и  $E$ , где  $D \in R$ ,  $E \in R$ , при котором каждому элементу  $x \in D$  соответствует единственный элемент  $f(x) \in E$ .

Множество  $D$  называется областью определения функции, а множество  $E$  – множеством значений функции. Обозначаются  $D(f)$  и  $E(f)$ .

Для задания функции необходимо и достаточно задать закон соответствия  $f$ , по которому для каждого значения аргумента можно указать единственное значение функции и область определения  $D(f)$ .

Например: Дана функция  $y = 7x^2 + 1$ . Областью определения функции является область действительных чисел, а областью изменения- положительные числа. Для функции  $y = \frac{3}{x-5}$  областью определения является все действительные числа, кроме числа 5, а

область изменения – действительные числа.

Способы задания функции:

• **Формулой.**

Если задаётся множество действия с аргументом  $x$ , по которой можно вычислить значение функции, то говорят, что функция задана формулой. Например,  $y = x^2 - 5x + 40$  или  $y = x^2$ .

• **Графиком :**

Определение: Графиком функции  $f$  называют множество всех точек  $(x, y)$  координатой плоскости, где  $y = f(x)$ ; Графики функции, в общем случае, является кривые.

• Таблицей:

Распределение соответствующих значениям функции к значениям аргумента с помощью таблицы называется табличным способом задания функции.

тот способ часто применяется в метеорологии.

Например: Дана  $y = f(x)$  в виде таблицы:

|        |                |   |               |   |   |
|--------|----------------|---|---------------|---|---|
| X      | -1             | 0 | 1             | 2 | 4 |
| $f(x)$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 |

Найти  $f(0)$ ;  $f(1)$ ;  $f(4)$  =?

Решение  $f(0)=0$ ;  $f(1)=\frac{1}{2}$ ;  $f(4)=2$ .

**Монотонность, ограниченность, четность и нечетность, периодичность функций.**

Определение 1. Функция  $y=f(x)$  называется возрастающей, если для любых двух значений  $x_1, x_2$  из области определения функции из того что  $x_1 < x_2$  следует, что  $f(x_1) < f(x_2)$

Из этого определения следует, что для любых двух точек графика возрастающей функции правая лежит выше левой (разумеется, при том условии, что координатная система выбирается обычным способом: ось  $Ox$ - горизонтальна, с отсчетом слева направо, а ось  $Oy$ - вертикальна, с отсчетом снизу вверх). Так, например, на рис. 1 изображен график возрастающей функции.

Определение 2. Функция  $y=f(x)$  называется убывающей, если для любых двух значений  $x_1, x_2$  из области определения функции из того что  $x_1 < x_2$  следует, что  $f(x_1) > f(x_2)$

Определение 3. Как возрастающие, так и убывающие, функции называются монотонными, а промежутки, в которых функция возрастает или убывает, - промежутками монотонности.

Определение 4. Функция называется строго монотонными, если она возрастающая или убывающая.

Существуют функции, не принадлежащие ни к одной из определенного нами выше класса функций. Так, например, функция  $y=x^2$  не удовлетворяет ни одному из выше указанных определений. Это, пример так называемой кусочно- монотонной функций. Она определена на множестве  $\mathbb{R}$  действительных чисел, т. е.  $D(y) = \mathbb{R}$ . Из ее графика следует, что в интервале  $(-\infty; 0)$  убывающая, а в интервале  $(0; +\infty)$  возрастающая.

Рассмотрим функции, области определения которых симметричны относительно начала координат, т.е. вместе с произвольным числом  $x$  область определения содержит и число  $(-x)$ . Для таких функций определены понятия четности и нечетности.

Функция  $f$  называется четной, если для любого  $x$  из ее области определения  $f(-x)=f(x)$ . Функция  $f$  нечетна, если для любого  $x$  из области определения  $f(-x)=-f(x)$ .

Пример. Функция  $f(x)=x^4$  четная, а функция  $g(x)=x^3$  нечетная. Действительно, область определения каждой из них (это вся числовая прямая) симметрична относительно точки  $O$  и для любого  $x$  выполнены равенства  $f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$ ,  $g(-x)=(-x)^3=-x^3=-g(x)$ .

**Пример.** Функция  $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^3 - x}$  четная, так ее область определения симметрична относительно начала координат (она состоит из всех чисел, отличных от -1, 0 и 1) и для всех  $x \in D(f)$  выполнено равенство  $f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{-x^3 - x}{-x^3 + x} = \frac{x^3 + x}{x^3 - x} = f(x)$ .

График этой функции симметричен относительно оси ОУ.

**Определение.** Функцию  $f$  называют периодической с периодом  $T \neq 0$ , если для любого  $x$  их области определения  $f$  значения этой функции в точках  $x$  и  $x+T$  равны, т.е.  $f(x+T)=f(x)$ .

С примерами периодических функций вы уже знакомы. Поскольку  $\sin(x+2\pi)=\sin x$  и  $\cos(x+2\pi)=\cos x$  для любого действительного  $x$ , синус и косинус – периодические функции с периодом  $2\pi$ . Тангенс и котангенс – периодические функции с периодом  $\pi$ , так как  $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg} x$ .

Очевидно, что если функция  $f$  – периодическая с периодом  $T$ , то при любом целом  $n \neq 0$  число  $nT$  тоже период этой функции.

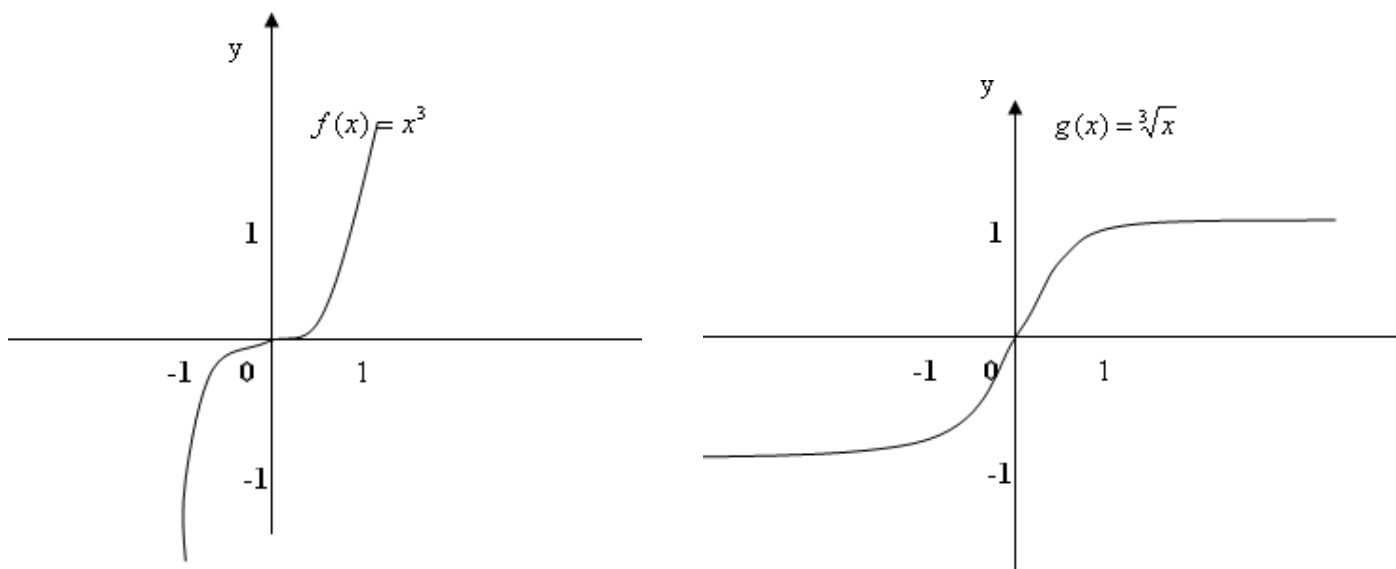
### **Обратная функция. Исследование функции и построение графика.**

**Определение.** Функцию  $g$ , которая в каждой точке  $x$  области значений обратной функции  $f$  принимает такое значение  $y$ , что  $f(y)=x$ , называют обратной к функции  $f$ .

**Пример 1.** Докажем, что функция  $f(x)=x^3$  обратима, и выведем формулу, задающую функцию  $y=g(x)$ , обратную к  $f$ .

По определению обратной функции сначала надо доказать, что уравнение  $f(y)=x$  при любом значении  $x$  имеет единственное решение  $y$ . В данном случае это уравнение таково:  $y^3=x$ . Оно имеет единственное решение  $y = \sqrt[3]{x}$  при любом  $x$ . Поэтому функция  $f(x)=x^3$  обратима и обратной к ней является функция  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ .

График функции  $g$ , обратной к функции  $f$ , симметричен графику  $f$  относительно прямой  $y=x$ .



**Теорема.** Если функция  $f$  возрастает (или убывает) на промежутке  $I$ , то она обратима. Обратная к  $f$  функция  $g$ , определенная в области значений  $f$ , также является возрастающей (соответственно убывающей).

|                                                                                                                                                      |  |                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/> -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                                                                 |
| Методические рекомендации                                                                                                                            |  | Стр. 1 из 116 стр.                                                                                                                                                                                                                            |

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Что называется числовой функцией? Как обозначается числовая функция?
2. Что называется областью определения функции?
3. Что является графиком функции  $y=x^2$ ?
4. Что называется обратной функцией?
5. Какие способы задания функций вы знаете?
6. Что называется возрастающей функцией? Убывающей? Четной? Нечетной?
7. Что называется функцией с промежутками монотонности?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

#### Занятие № 5

##### 5.1. Тема: Теорема о пределах.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

##### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:** дать учащимся определение непрерывной функции в точке на промежутке.
- **воспитательная:** выработать у учащихся навыки самостоятельной работы.
- **развивающая:** научить учащихся делать анализы и выводы при изучении процессов непрерывности функции в точки.

- **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятий
- б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

##### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/>             -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 1 из 116 стр.                                                                                                                                                                                                                                                              |

### Непрерывность функции в точке и на промежутке.

**Определение 1.** Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x=a$ , если предел функции при  $x \rightarrow a$  равен значению функции при  $x=a$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Определение 2.** Если условие непрерывности функции в точке  $x=a$  нарушено, то такую точку называют точкой разрыва функции.

Для элементарных функций справедливы следующие положения:

1. область непрерывности элементарной функции совпадает с ее областью определения, т.е. элементарная функция непрерывна во всей области определения;
2. элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках какого-либо промежутка, но не во всех его точках;
3. элементарная функция может иметь разрыв только в той точке, в которой она не определена.

**Определение 3.** Функция называется непрерывной в промежутке, если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

**Пример 1.** Исследовать на непрерывность функцию  $y=3x$  в точке  $x=2$ .

**Решение:** Данная функция определена на всей числовой оси, т.е.  $D(y)=[-\infty; +\infty[$ . Область непрерывности совпадает с областью ее определения. Используем определение непрерывности:  $\lim_{x \rightarrow 2} 3x = 3 \cdot 2 = 6$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow 2} 3x = f(2)$ , следовательно функция непрерывна в точке  $x=2$ .

**Пример 2.** Исследовать на непрерывность функцию  $y=x^2-2$  при  $x=3$ .

$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2) = 3^2 - 2 = 7$ ,  $f(3) = 3^2 - 2 = 7 \Rightarrow f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2)$ , следовательно, функция непрерывна в точке  $x=3$ .

### Теоремы о пределах.

**Теорема о единственности предела.** Если функция  $f(x)$  имеет предел при  $x$ , стремящемся к  $a$ , то этот предел единственный.

**Теорема 1.** Если существуют пределы функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , то существует также и предел их суммы, равный сумме пределов функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$

**Теорема 2.** Если существуют пределы функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , то существует также и предел их произведения, равный произведению, пределов функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$

**Теорема 3.** Если существуют пределы функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , то существует также и предел их частного, равный частному пределов функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}, \text{ где } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0.$$

**Следствие 1.**  $\lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

**Следствие 2.** если  $n$ -натуральное число, то  $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$

Примеры решения задач:

( )

|                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> MEDISINA<br/> AKADEMIASY<br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> SOUTH KAZAKHSTAN<br/> MEDICAL<br/> ACADEMY<br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                  |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                                            |
| Методические рекомендации                                                                                                              |  | Стр. 1 из 116 стр.                                                                                                                                                                                                       |

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 27} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)(x^2 + 3x + 9)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x^2 + 3x + 9} = \frac{3+1}{9+9+9} = \frac{4}{27}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 - 6x^2 + x - 5) = 5 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 2 - 5 = 13$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 1}{x - 3} = \frac{2^2 - 2 + 1}{2 - 3} = -3, \text{ т.к. при } x=2 \text{ знаменатель дроби не равен нулю.}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{4x - 8}, \text{ т.к. } \lim_{x \rightarrow 2} (4x - 8) = 4 \cdot 2 - 8 = 0, \text{ то теорему 3 нельзя применить, т.к.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 8) = 0 - \text{б.м.}, \text{ то обратная ей величина } \frac{1}{4x - 8} - \text{б.б.}, \text{ поэтому при } x \rightarrow 2 \text{ произведение}$$

$$\frac{1}{4x - 8} \cdot 5 \text{ есть величина б.б., т.е. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{4x - 8} = \infty.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x - 2)}{x(2x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 2}{2x - 5} = \frac{3 \cdot 0 - 2}{2 \cdot 0 - 5} = \frac{2}{5}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x} = \left| \begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x_1 = 3, x_2 = 2 \\ x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{3x} = \frac{1}{9}.$$

### Два замечательных предела.

Рассмотрим решение некоторых примеров

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 6x^2 + 5x - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^3 \left( 1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \right) = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \right) = \infty, \text{ т.к. при } x \rightarrow \infty \text{ величины } \frac{6}{x}, \frac{5}{x^2} \text{ и } \frac{1}{x^3} - \text{б.м. и их пределы равны } 0.$$

$$2. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} \text{ приведем этот предел к виду } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 - \text{первый замечательный предел. Для этого числитель и знаменатель дроби умножим на 2, а постоянный множитель 2 вынесем за знак предела. Имеем: } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2\alpha}{2\alpha} = 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}, \text{ т.к. если } \alpha \rightarrow 0, \text{ то и } 2\alpha \rightarrow 0,$$

|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/>             -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 17 из 116                                                                                                                                                                                                                                                                  |

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Что называется точкой разрыва функции?
  2. Что называется непрерывностью функции на промежутке?
  3. Элементарная функция может ли быть непрерывной в области определения функции?
- а) оценивание учащихся  
б) задание на дом

#### Занятие № 6

#### 5.1. Тема: Показательная функция.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:** объяснить основные свойства показателей степеней, построение показательной функции, ее свойств и графика.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.

- **развивающая:** научить применять свойства и находить график показательной функции.

- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятий
  - б) определение целей и задач занятия
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов

#### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

40 мин

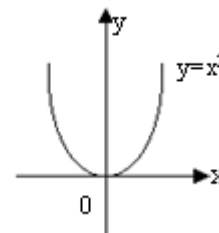
**Показательная функция, ее свойства и графики.**

**Степенная функция  $y=x^n$ , где  $n$  – любое действительное число.**

1) при  $n=2$  получим квадратную функцию  $y=x^2$ , ее графиком является парабола.

Свойства функции  $y=x^2$ :

- 1) область определения  $D(y) \in \mathbb{R}$
- 2)  $x^2 = (-x)^2$  - четная
- 3)  $x^2 \geq 0$ , значит ограничена снизу
- 4)  $x \in [0; \infty)$  - возрастает,  $x \in (-\infty; 0]$  - убывает

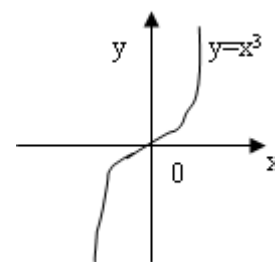


2) при  $n=3$  получим функцию  $y=x^3$ , ее графиком является кубическая парабола.

Свойства функции  $y=x^3$ :

- 1) область определения  $D(y) \in \mathbb{R}$
- 2)  $x^3 = (-x)^3$  - нечетная
- 3)  $x \in (-\infty; +\infty)$  - возрастает

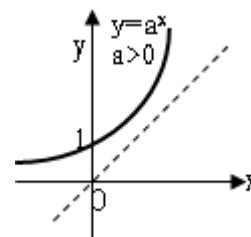
Степенная функция  $y=x^n$  в случае, когда  $n$  - четное число, обладает теми же свойствами, что и функция  $y=x^2$ , а в случае, когда  $n$  - нечетное число, теми же свойствами, что и функция  $y=x^3$ .



**Показательная функция  $y=a^x$** , где основание степени  $a$  - данное положительное число, не равное единице, а показатель степени  $x$  - переменная величина, которая может принимать любые действительные значения.  $a \neq 0$ ,  $a > 0$ .

Свойства показательной функции:

- 1) область определения  $D(y) \in \mathbb{R}$
- 2)  $E(y) \in (0; \infty)$
- 3) функция ни четная, ни нечетная
- 4) при  $a > 1$  - возрастает, при  $a < 1$  - убывает
- 5) график проходит через точку  $(0; 1)$ , т.к.  $1=a^0$ .



#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:

|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/>             -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 19 из 116                                                                                                                                                                                                                                                                  |

- Дополнительная

## 5.6. Литература

1. Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
2. А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
3. А.Ш.Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
4. Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
5. А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов ЦБ Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

### а. Контроль (вопросы, тесты,задачи и тд.) 10 мин

1. Что называется показательной функцией?
2. Как определяется показательная функция?
3. Назовите свойства показательных функций?
4. Будет ли симметричным график показательной функции?  
а) оценивание учащихся  
б) задание на дом

## Занятие № 7

### 5.1. Тема: Логарифмическая функция.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока): комбинированный.**

### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:** дать понятие о десятичных и натуральных логарифмах, логарифмических функциях, свойствах и графике логарифмических функций.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научить исследовать график и использовать свойства логарифмической функции.

- **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятий
- б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

#### Десятичные и натуральные логарифмы.

Определение: логарифмом числа по данному основанию называется показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить заданное (логарифмируемое) число.

Обозначение логарифма:  $\log_a N = x$ , где  $a$  – основание логарифма,  $N$  – заданное число.

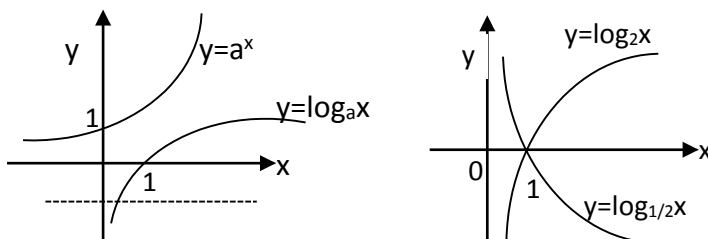
Из определения логарифма можно записать показательное уравнение:  $a^x = N$ .

#### Логарифмическая функция, ее свойства и графики

Логарифмическая функция  $y = \log_a x$  ( $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $a \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ ) является обратной по отношению к показательной  $y = a^x$ . Поэтому их графики симметричны относительно I и III координатных углов.

Свойства функции:

- 1)  $D(y)=R_+$
- 2)  $E(y)=R$
- 3)  $\log_a 1=0$ ;  $\log_a a=1$
- 4)  $]0;+\infty[$  - возрастает, если  $a>1$
- 5) логарифмы чисел, меньших единицы, положительны, а логарифм-мы чисел, больших единицы, отрицательны.



**Свойства логарифмов:**

1. Отрицательные числа и нуль не имеют логарифмов.
2. При любом основании  $a(a>0, a\neq 1)$  логарифм единицы равен нулю.
3. Логарифм числа, равного основанию, всегда есть единица.

$\log_{10} x = \lg x$  - десятичный логарифм;  $\log_e x = \ln x$  - натуральный логарифм.

**Теоремы о логарифмах произведения, частного, степени и корня:**

1.  $\log_a (N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$
2.  $\log_a \left( \frac{N_1}{N_2} \right) = \log_a N_1 - \log_a N_2$
3.  $\log_a N^m = m \log_a N$
4.  $\log_a \sqrt[m]{N} = \frac{\log_a N}{m} = \frac{1}{m} \log_a N$

**Основные свойства логарифма.**

При любом  $a>0, b>0, a\neq 1$  и любых положительных  $x$  и  $y$  выполнены равенства:.

1.  $\log_a 1 = 0$
2.  $\log_a a = 1$
3.  $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
4.  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5.  $\log_a x^p = p \log_a x$
6.  $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x$
7.  $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}, \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Примеры: Прологарифмировать выражения:

|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/>             -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 21 из 116                                                                                                                                                                                                                                                                  |

а)  $x = \frac{ab}{c^3}$ . Решение:  $\log x = \log(ab) - \log(c^3) = \log a + \log b - 3\log c$ .

б)  $x = \sqrt{\frac{3a^2b}{c^5}}$ .

Решение:  $\log x = -\frac{1}{2} \log \left( \frac{3a^2b}{c^5} \right) = -\frac{1}{2} [\log(3a^2b) - \log(c^5)] = -\frac{1}{2} \log(3a^2b) -$   
 $-\frac{1}{2} \log(c^5) = \frac{1}{2} (\log 3 + 2\log a + \log b) - \frac{5}{2} \log c = \frac{1}{2} \log 3 + \log a + \frac{1}{2} \log b - \frac{5}{2} \log c$ .

в)  $x = \frac{a^2(a+b)^3}{(a-b)^2c^3}$ . Решение:  $\log x = \log [a^2(a+b)^3] - \log [(a-b)^2c^3] = \log a^2 +$   
 $+ \log(a+b)^3 - \log(a-b)^2 - \log c^3 = 2\log a + 3\log(a+b) - 2\log(a-b) - 3\log c$ .

Примеры: 1) записать с помощью знака логарифма следующие равенства:

а)  $5^2 = 25 \Rightarrow 2 = \log_5 25$ ; б)  $8^{-3} = \frac{1}{512}$ ; в)  $10^0 = 1$ ; г)  $7^3 = 343 \Rightarrow \log_7 343 = 3$ ; д)  $10^{-2} = 0,01$ ;

2) Записать без знака логарифма следующие равенства:

а)  $\log_{10} 1000 = 3 \Rightarrow 10^3 = 1000$ ; в)  $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ ;  
 б)  $\log_{10} 0,001 = -3$ ; г)  $\log_5 \frac{1}{25} = -2$ .

3) Найти логарифмы данных чисел:

а)  $\log_2 16 \Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$  б)  $\log_6 36$ ; в)  $\log_8 1$ ;  
 г)  $\log_5 125$ ; д)  $\log_{\frac{1}{3}} 27$ ; е)  $\log_3 \frac{1}{81}$ .

4) Определить x по заданным условиям:

а)  $\log_4 x = -3 \Rightarrow 4^{-3} = x \Rightarrow x = \frac{1}{64}$ ;  
 б)  $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{8} = 2^{-3} \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} \Rightarrow \sqrt{x^3} = 2^{-3} \Rightarrow x^3 = 2^{-6} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ .

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная::
- Дополнительная

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М.

|                                                                                                                                                      |  |                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/> -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                 |
| Методические рекомендации                                                                                                                            |  | Стр. 22 из 116                                                                                                                                                                                                                                |

Просещение, 2018.

- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### 1. 5.7. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Что такое логарифм?
  2. Что называется равенством логарифма?
  3. Что называется десятичным логарифм?
  4. Что называется натуральным логарифм?
- Каковы основные свойства логарифма а) оценивание учащихся  
б) задание на дом

### Занятие № 8

**5.1. Тема:** Логарифмические и показательные уравнения и системы уравнений.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

**5.2. Цель занятия:.**

- **образовательная:.**
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:.**
- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятий
  - б) определение целей и задач занятия
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов

**5.3. Задачи обучения.**

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

**Решение простейших и сводящихся к ним логарифмических уравнений и неравенств.**

Определение: Уравнение в котором неизвестная содержится по знаком логарифма называется логарифмическим уравнением.

Пример: а) решить уравнение  $\log_x(2^3 - 5x + 10) = 3$  .

$$x^3 - 5x + 10 = x^3$$

$$\log_2(2^3 - 5 \cdot 2 + 10) = \log_2 8 = 3$$

|                                                                                                                          |  |                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p> SOUTH KAZAKHSTAN<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                    |  | 044-73/11-142                                                                                                       |
| Методические рекомендации                                                                                                |  | Стр. 23 из 116                                                                                                      |

подстановки.  $a_1=2$ ,  $b_1=1$  и  $a_2=-1$ ,  $b_2=-2$ .  $\lg x = a$ ,  $\lg y = b$  перейдем к  $x$  и  $y$  и найдем  $\lg x = 2$ ,  $\lg y = 1$  и  $\lg x = -1$ ,  $\lg y = -2$ . Тогда  $x_1=100$ ,  $y_1=10$  и  $x_2=0,1$ ,  $y_2=0,01$

Ответ: (100;10) и (0,1; 0,01)

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Что такое логарифмическое уравнение?
2. Как обозначается обычное логарифмическое уравнение?
3. Сколько методов решения системы уравнений вы знаете?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

### Занятие № 9

#### 5.1. Тема: Логарифмические и показательные неравенства и системы неравенств

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:**
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:**

- **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятий
- б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

#### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

Определение: Неравенство в котором неизвестная содержится по знаком логарифма называется логарифмическим неравенством.

Любое значение неизвестной переменной обращающее неравенство в верное числовое

|                                                                                                                                                                     |  |                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                               |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                         |
| Методические рекомендации                                                                                                                                           |  | Стр. 24 из 116                                                                                                                                                                                                                                        |

неравенство называется решением неравенство.

Решить логарифмическое неравенство значит найти все его решения или доказать что нет решений.

Пример: решить неравенство  $\log_{1/3}(2x+5) < -2$

Решение: Запишем правую часть неравенство через логарифм по основанию  $1/3$  тогда  $-2 = \log_{1/3}9$  поэтому данное неравенство обращается в следующее неравенство.

$$\log_{1/3}(2x+5) < \log_{1/3}9 \text{ здесь } a=1/3. \begin{cases} 2x+5 > 0 \\ 2x+5 > 9 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > -\frac{5}{2} \\ x > 2 \end{cases}$$

Ответ: 25

#### 5.4. Основные вопросы темы..

##### • Закрепление пройденного материала: 25 мин

- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Что такое логарифмические неравенства?
2. Что называется решением неравенства?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

#### Занятие № 10

#### 5.1. Тема: Тригонометрические функции.

- Количество учебных часов: 135 мин
- Вид занятия (тип урока): комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:** дать определение тригонометрических функций, научить распознавать символы в четверти, применять свойства и построить графики.

|                                                                                                                                                      |  |                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/> -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                 |
| Методические рекомендации                                                                                                                            |  | Стр. 25 из 116                                                                                                                                                                                                                                |

- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.

- **развивающая:** научить строить графики и объяснять основные свойства тригонометрических функций.

• **Организационный момент: 10 мин**

а) организация рабочей обстановки на занятий

б) определение целей и задач занятия

• **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

а) проверить уровень базовых знаний студентов

**5.3. Задачи обучения.**

• **Объяснение новой темы: 40 мин**

**Свойства и графики тригонометрических функций.**

Определение: Функции  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$  называются тригонометрическими функциями.

Исследуем тригонометрическую функцию  $y = \sin x$  :

1)  $D(y) \quad x \in ] - \infty; +\infty[$

2)  $E(y) \quad [-1; 1]$

3)  $\sin(-x) = -\sin x$  *нечетная*

4)  $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$  *периодическая* :  $T = 2\pi$ .

5) функция непрерывна на всей числовой прямой.

6)  $\sin x = 0 \quad x = 0 \quad x = \pi n, n \in Z$   
 $\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} \quad y = 0$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = \frac{\pi}{4} \quad y = 0$   
 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad x = \frac{\pi}{3}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad x = \frac{\pi}{3}$   
 $\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2}$

$\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2}$

8)  $M.A \left( \frac{\pi}{2}; 1 \right)$  – точка максимума .

$m.B \left( -\frac{\pi}{2}; -1 \right)$  – точка минимума .

7)  $y = \sin x$   
 $\left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$  – возрастает .

$\left[ \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right]$  – возрастает .

$\left[ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right]$  – убывает .

Исследуем тригонометрическую функцию  $y = \cos x$  .

1)  $D(y) = R \quad x \in ] - \infty; +\infty[$

2)  $\cos x = 0; \quad x \pm \frac{\pi}{2} + \pi k.$

7)  $[-\pi + 2\pi k, 0 + 2\pi k]$  – *возрастает*.

$[-\pi + 2\pi k, 0 + 2\pi k]$  – *убывает*.

8)  $x = 2\pi k$  – *точка максимума*.

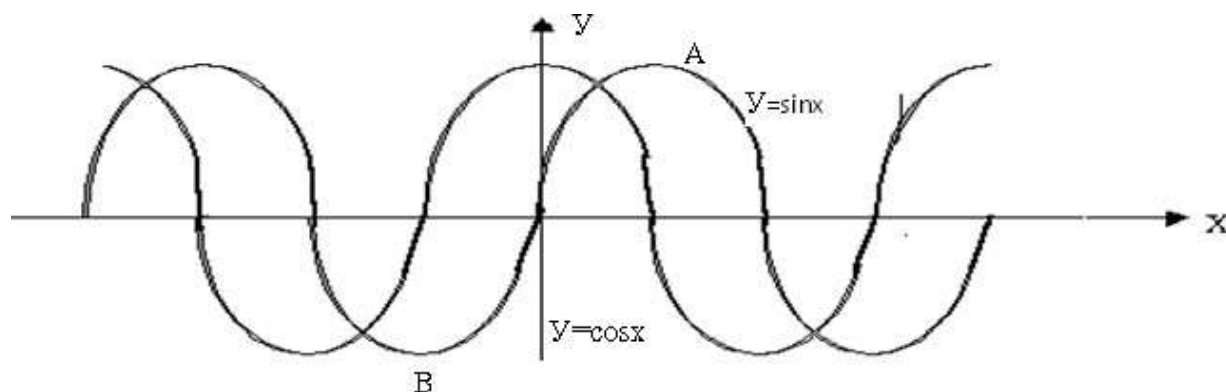
$x = \pi + 2\pi$  – *точка минимума*  $(-1)$ .

А теперь построим графики функции  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$

Для этого заполним таблицы:

| x        | 0 | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|----------|---|----------------------|----------------------|-----------------|-------|
| $\sin x$ | 0 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | 0     |

| x        | 0 | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|----------|---|----------------------|-----------------|-----------------|-------|
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$   | 0               | -1    |



Исследуем тригонометрическую функцию  $y = \operatorname{tg} x$ :

1)  $D(y) \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

2)  $E(y) \quad ] - \infty; +\infty[$

3)  $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$  *нечетная*.

4)  $\operatorname{tg}(x \pm \pi) = \operatorname{tg} x$  *периодическая*:  $T = \pi$ .

5) Имеет точки разрыва, где не имеет смысла.  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$ .

6)  $x = \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$ .

7)  $\operatorname{tg} x$  – *строго возрастает* на  $\left[ -\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right]$ .

Исследуем тригонометрическую функцию  $y = \operatorname{ctg} x$ .

1)  $D(y) \quad x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

2)  $E(y) \quad ] - \infty; +\infty[$

3)  $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg}x$  нечетная.

4)  $\operatorname{ctg}(x \pm \pi) = \operatorname{ctg}x$  периодическая :  $T = \pi$ .

5) Имеет точки разрыва, где не имеет смысла.  $x = \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$ .

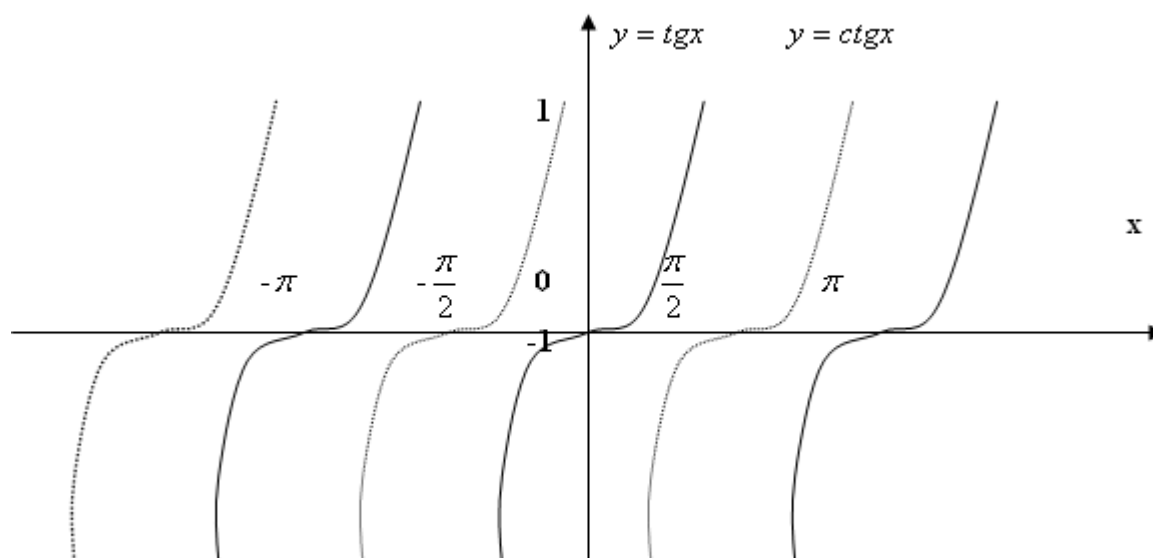
6) строго убывает  $]\pi k; \pi + \pi k[ \quad k \in \mathbb{Z}$

А теперь построим графики функции  $y = \operatorname{tg}x$ ,  $y = \operatorname{ctg}x$  :

Для этого заполним таблицу:

| x                    | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|----------------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-------|
| $\operatorname{tg}x$ | 0 | 1               | $\sqrt{3}$      | -               | 0     |

| x        | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|----------|---|-----------------|----------------------|-----------------|-------|
| $\cos x$ | - | 1               | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               | -     |



#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнения тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К.

|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/>             -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 28 из 116                                                                                                                                                                                                                                                                  |

Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с

- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

1.

**а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин**

1. Какие функции называются тригонометрическими?
  2. Назовите свойства функции  $y = \sin x$ ?
  3. Назовите свойства функции  $y = \cos x$ ?
  4. Назовите свойства функции  $y = \tg x$ ?
  5. Назовите свойства функции  $y = \ctg x$ ?
- а) оценивание учащихся  
б) задание на дом

### Занятие № 11

**5.1. Тема:** Обратные тригонометрические функции.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

**5.2. Цель занятия:**

- **образовательная:** ввести понятие обратных тригонометрических функций.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научить преобразованию суммы и разности тригонометрических функций в произведение, преобразованию произведения тригонометрических функций в сумму или разность. Научить нахождению обратных тригонометрических функций.

- **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятии
- б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

**5.3. Задачи обучения.**

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

Обратные тригонометрические функции (круговые функции) - математические функции, являющиеся обратными к тригонометрическим функциям. К обратным тригонометрическим функциям обычно относят шесть функций:

- арксинус (обозначение:  $\arcsin$ )
- арккосинус (обозначение:  $\arccos$ )
- арктангенс (обозначение:  $\arctg$ )
- арккотангенс (обозначение:  $\text{arcctg}$ )
- арксеканс (обозначение:  $\text{arcsec}$ )
- арккосеканс (обозначение:  $\text{arc cosec}$ )

Название обратной тригонометрической функции образуется от названия соответствующей ей тригонометрической функции добавлением приставки «арк-» (от лат. *arcus* - дуга). Это связано с тем, что геометрически значение обратной тригонометрической функции можно связать с длиной дуги единичной окружности (или углом, стягивающим эту дугу), соответствующей тому или иному отрезку. Так, обычный

синус позволяет по дуге окружности найти стягивающую её хорду, а обратная функция решает противоположную задачу.

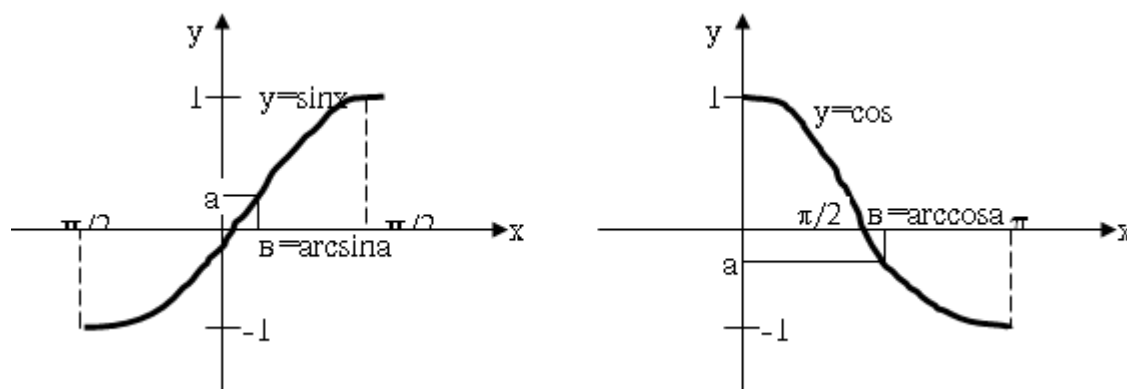
Определение. *Арксинусом* числа  $m$  называется такой угол  $x$ , для которого  $\sin x = m$ ,  
 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $|m| \leq 1$ .

Определение. *Аркосинусом* числа  $m$  называется такой угол  $x$ , для которого  $\cos x = m$ ,  
 $0 \leq x \leq \pi$ ,  $|m| \leq 1$ .

Определение. *Арктангенсом* числа  $m$  называется такой угол  $x$ , для которого  $\operatorname{tg} x = m$ ,  
 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ .

Определение. *Аркотангенсом* числа  $m$  называется такой угол  $x$ , для которого  $\operatorname{ctg} x = m$ ,  
 $0 < x < \pi$ .

### Графики обратных тригонометрических функций



При всех допустимых значениях аргумента  $x$  справедливы тождества:

а)  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ , если  $|x| \leq 1$

б)  $\sin(\arcsin x) = x$ , если  $-1 \leq x \leq 1$

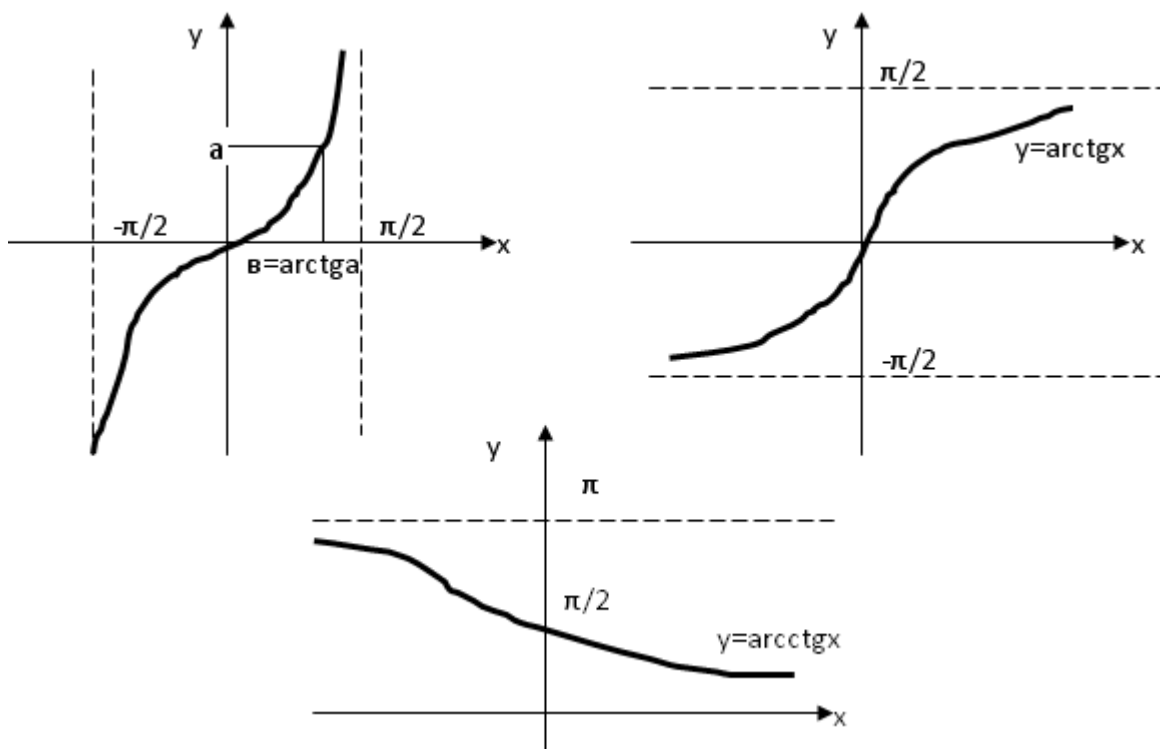
в)  $\cos(\arccos x) = x$ , если  $-1 \leq x \leq 1$

г)  $\arcsin(\sin x) = x$ , когда  $|x| \leq \frac{\pi}{2}$

д)  $\arccos(\cos x) = x$ , когда  $0 \leq x \leq \pi$

Функция  $y = \arcsin x$  является нечетной, т.е.  $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ .

Функция  $y = \arccos x$  не является ни четной, ни нечетной.



При всех допустимых значениях аргумента  $x$  справедливы тождества:

- а)  $\arctg(\operatorname{tg} x) = x$ , если  $|x| < \frac{\pi}{2}$   
 б)  $\operatorname{tg}(\arctg x) = x$ , для любого действительного  $x$   
 в)  $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ , для любого действительного  $x$   
 г)  $\operatorname{arcctg} x + \arctg x = \frac{\pi}{2}$   
 д)  $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ , если  $0 < x < \pi$

Функция  $y = \arctg x$  является нечетной, т.е.  $\arctg(-x) = -\arctg x$ .

Функция  $y = \operatorname{arcctg} x$  не является ни четной, ни нечетной.

График функции  $y = \arctg x$  имеет две асимптоты:  $y = -\frac{\pi}{2}$  и  $y = \frac{\pi}{2}$ .

График функции  $y = \operatorname{arcctg} x$  имеет две асимптоты:  $y = 0$  и  $y = \pi$ .

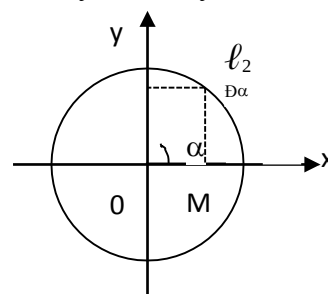
### Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Дана прямоугольная система координат  $xOy$ . Окружность с центром в начале координат и радиусом равным 1 называется единичной окружностью. Пусть полуось  $Ox$  неподвижная ось, а угол  $\alpha$  считается началом отсчета. (1-рис).

Дан угол  $\alpha$ . На окружности ей соответствует точка  $P_\alpha(x, y)$ .

Частный случай когда  $\alpha = 0$ , то  $P_0(1, 0)$ ; если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , то  $P_{\frac{\pi}{2}}(0, 1)$ ;

если  $\alpha = \pi$  то  $P_\pi(-1, 0)$ . Если  $P_{2\pi} = P_0$  то в общем виде  $P_{2\pi R} = P_0$ ,



$$P_{\alpha+2\pi k} = P_{\alpha} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Определение:** Ордината радиус вектора  $OP_{\alpha}$  называется синусом угла  $\alpha$ .

**Определение:** Абцисса радиус вектора  $OP_{\alpha}$  называется косинусом угла  $\alpha$ .

**Определение:** Отношение синуса угла  $\alpha$  к косинусу угла  $\alpha$  называется тангесом;

**Определение:** Отношение косинуса угла  $\alpha$  к синусу угла  $\alpha$  называется котангесом;

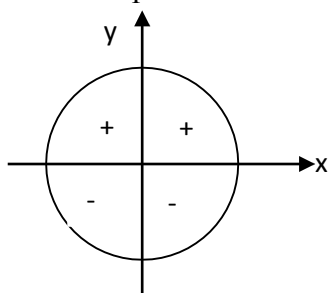
Знаки тригонометрических функций по четвертям

I четверть от  $0^0$  до  $90^0$ ;

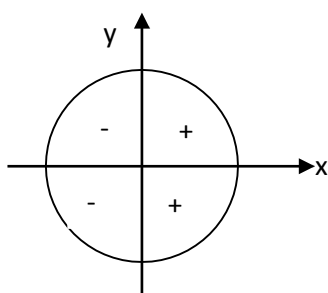
II четверть от  $90^0$  до  $180^0$ ;

III четверть от  $180^0$  до  $270^0$ ;

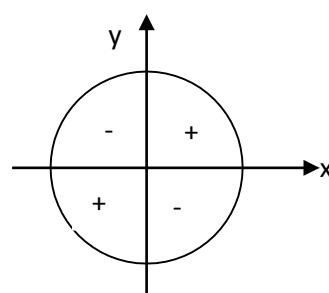
IV четверть от  $270^0$  до  $360^0$ .



Знаки синуса по четвертям



Знаки косинуса по четвертям



Знаки тангенса и котангеса по четвертям

Для любых  $x$  из области определения соответствующих тригонометрических функций верны следующие равенства:

a)  $\sin(-x) = -\sin x$  - нечетная функция;  $\cos(-x) = \cos(x)$  - четная функция;

$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$  - нечетная функция;  $\operatorname{ctg}(-x) = \operatorname{ctg}(x)$  - нечетная функция;

$\sin(x+2\pi n) = \sin x$  - наименьший положительный период  $2\pi$ ;

$\cos(x+2\pi n) = \cos(x)$ ; - наименьший положительный период  $2\pi$ ;

$\operatorname{tg}(x+\pi n) = \operatorname{tg} x$ ; - наименьший положительный период  $\pi$ ;

$\operatorname{ctg}(x+\pi n) = \operatorname{ctg}(x)$  - наименьший положительный период  $\pi$ ;

**Основные тригонометрические тождества:**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad (2) \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \sin \alpha \neq 0, \quad \cos \alpha \neq 0 \quad (6)$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad (3) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0, \quad \cos \alpha \neq 0 \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cos \alpha \neq 0 \quad (4) \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0, \quad \cos \alpha \neq 0 \quad (8)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0 \quad (5)$$

Рассмотрим следующие равенства:

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \quad (1)$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y, \quad (2)$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \quad (3)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y, \quad (4)$$

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = \beta \end{cases} \quad (5)$$

$$2x = \alpha + \beta \quad x = \frac{\alpha + \beta}{2}; \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (6)$$

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cdot \cos y$$

Сложим почленно равенства (1) и (2)

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (7)$$

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \cos x \cdot \sin y$$

Вычитаем из (1) почленно (2), получим:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (8)$$

Аналогично из равенств (3) и (4) получим следующие равенства:

$$\cos \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (9) \quad \text{и} \quad \cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (10)$$

### Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Тождественные преобразования тригонометрических выражений.

$$\begin{aligned} & 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} : 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = -\cos \frac{\alpha - \beta}{2} : \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ & = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

Докажите следующие тождества:

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}; \quad \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\cos \alpha};$$

$$\frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{1}{\cos \alpha + \cos \beta}.$$

$$\sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \sin \beta \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha + \beta)$$

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.

|                                                                                                                                                                     |  |                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                               |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                         |
| Методические рекомендации                                                                                                                                           |  | Стр. 33 из 116                                                                                                                                                                                                                                        |

- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

**а. Контроль (вопросы, тесты,задачи и тд.) 10 мин**

1. Какие функции относятся к обратным тригонометрическим функциям?
2. Определение и график арксинуса.
3. Определение и график арккосинуса.
4. Определение и график арктангенса.
5. Определение и график арккотангенса
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

**Занятие № 12**

**5.1. Тема:** Простейшие тригонометрические уравнения и их решение.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

**5.2. Цель занятия:**

- **образовательная:** ознакомить учащихся с методами решения тригонометрических уравнений и системы уравнений.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме.

- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятии
  - б) определение целей и задач занятия
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов

**5.3. Задачи обучения.**

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

**Простейшие тригонометрические уравнения и их решения.**

Рассмотрим уравнения:

а)  $\sin x = 1$  пересечение графиков функций  $y=\sin x$  и  $y=1$ .

Это точки пересечения :  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \sin x = -1 & \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\
 \text{в) } \sin x = 0 & \quad x = \pi k, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}
 \quad \sin x = m \quad x = (-1)^n \arcsin m + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(1)

Рассмотрим уравнения:

а)  $\cos x = 1$  пересечение графиков функций  $y=\cos x$  и  $y=1$ .

$$x = 2\pi k, k \in Z$$

$$\cos x = m \quad x = \pm \arccos m + 2\pi k, \quad k \in Z \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x = m \quad x = \arctg m + \pi k, \quad k \in Z \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg} x = m \quad x = \operatorname{arcctg} m + \pi k, \quad k \in Z \quad (4)$$

Преподаватель совместно с учащимися решает следующие уравнения:

$$1) \sin^2 x = \frac{1}{4}, \quad \sin x = \pm \frac{1}{2}, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z;$$

$$2) \cos^2 x = \frac{3}{4}, \quad \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z;$$

$$3) \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Рассмотрим решение сложных уравнений.

$$1) \sin^2 x - 3 = 2\sin x - \text{приводим к квадратному } \sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0 \text{ и } \sin x = y, \text{ тогда:}$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \quad D = 16, \quad y_1 = -1, \quad y_2 = 3$$

$$\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$2) \sin x = 1 - 2\sin^2 x - \text{решить самостоятельно.}$$

$$3) \operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x - \text{путем вынесения за скобки}$$

$$\operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x - 1) = 0, \quad \operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi k, \quad k \in Z$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 1, \quad \operatorname{tg} x = \pm 1, \quad x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$$

$$4) 2\cos^2 x = 3\sin x + 2 - \text{путем приведения к одной функции.}$$

$$2(1 - \sin^2 x) = 3\sin x + 2$$

$$2 - 2\sin^2 x = 3\sin x + 2$$

$$2 - 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x = 0 \quad \sin x(2\sin x + 3) = 0$$

$$\sin x = 0, \quad x = \pi k, \quad k \in Z$$

$$2\sin x + 3 = 0, \quad \sin x = -\frac{3}{2} - \text{нет решения}$$

|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/>             -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 35 из 116                                                                                                                                                                                                                                                                  |

5)  $2tgx + 3ctgx = 5$  - решить самостоятельно.

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

1. Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
2. А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
3. А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
4. Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
5. А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### 1.7 Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Что такое система уравнений?
2. Что такое решение системы уравнений?
3. В чем отличие решения уравнений от решения системы уравнений?
4. Когда уравнения образует систему?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

#### Занятие № 13

#### 5.1. Тема: Тригонометрические уравнения и системы уравнений

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:** ознакомить с решением системы тригонометрических уравнений
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научить решать тригонометрические уравнения и системы тригонометрических уравнений путем снижения степени.

- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятий
  - б) определение целей и задач занятия
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов

#### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

**Тригонометрические уравнения, решаемые путем понижения степени. Решение однородных тригонометрических уравнений.**

|                                                                                                                          |  |                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p> <br/> SOUTH KAZAKHSTAN<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                    |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                              |
| Методические рекомендации                                                                                                |  | Стр. 36 из 116                                                                                                                                                                                             |

Преобразуйте в произведение следующие выражения:

- $\sin 40^\circ + \sin 80^\circ = 2 \sin \frac{40 + 80}{2} \cdot \cos \frac{40 - 80}{2} = 2 \sin 60^\circ \cdot \cos 20^\circ$
- $\sin 80^\circ - \sin 40^\circ$  решить дома
- $\cos 50^\circ + \cos 20^\circ = 2 \cos 35^\circ \cdot \cos 15^\circ$
- $\cos 15^\circ - \cos 25^\circ$  решить дома
- $\sin 20^\circ + \cos 80^\circ = \sin 20^\circ + \sin 10^\circ$

|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/>             -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 37 из 116                                                                                                                                                                                                                                                                  |

■  $\sin 40^\circ - \cos 25^\circ$

■  $\sin \alpha + \cos \alpha$  = решить дома

■  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}; \quad \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$  решить дома

$$2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} : 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = -\cos \frac{\alpha - \beta}{2} : \cos \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$= \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Докажите следующие тождества:

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}; \quad \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\cos \alpha};$$

$$\frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{1}{\cos \alpha + \cos \beta}.$$

$$\sin \beta \cdot \sin \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \sin \beta \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha + \beta)$$

$$\frac{\sin \alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$$

9)  $\sin \alpha + \sin 5\alpha = 2 \sin 3\alpha \cdot \cos 2\alpha$

$$\cos \alpha + \cos 5\alpha = 2 \cos 3\alpha \cdot \cos 2\alpha$$

$$\frac{2 \sin 3\alpha \cdot \cos 2\alpha}{2 \cos 3\alpha \cdot \cos 2\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$$

$$\sin 100^\circ - \sin 40^\circ = \cos 70^\circ$$

10)  $\sin 100^\circ - \sin 40^\circ = 2 \cos 70^\circ \cdot \sin 30^\circ = 2 \cos 70^\circ \cdot \frac{1}{2} = \cos 70^\circ$

11)  $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} = 2 \cos \alpha$

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

1. Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
2. А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
3. А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
4. Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К.

|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/>             -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 38 из 116                                                                                                                                                                                                                                                                  |

Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с

- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

**а. Контроль (вопросы, тесты,задачи и тд.) 10 мин**

1. Что такое тригонометрическое уравнение?
2. Что такое решение тригонометрических уравнений?
3. Методы решения тригонометрических уравнений?
4. Как решить сложные тригонометрические уравнения?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

**Занятие № 14**

**5.1. Тема:** Векторы на плоскости, в пространстве.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

**5.2. Цель занятия:**

- **образовательная:** объяснить формулы расчета векторов, длины векторов, величины угла между векторами и расстояния между двумя точками

- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.

- **развивающая:** научить применять действия к векторам, вычислить длину векторов, величину угла между векторами и расстояние между двумя точками

- **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятии
- б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

**5.3. Задачи обучения.**

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

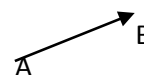
**Векторы на плоскости, в пространстве. Действия над векторами.**

**Разложение вектора на составляющие. Проекция вектора.**

**Теорема о проекции суммы векторов.**

Определение 1. Направленный отрезок называют **вектором**.

Вектор, заданный парой (А, В) несовпадающих точек, обозначается символом  $\overrightarrow{AB}$ . Точка А называется началом, а точка В – концом вектора.



Определение 2. Расстояние  $|\overrightarrow{AB}|$  называется длиной (модулем) вектора  $\overrightarrow{AB}$ . Такие вектора можно обозначать так:  $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{x}$ .

Определение 3. Вектор  $\overrightarrow{AB}$ , концы которого совпадают, называется нулевым вектором.

Определение 4. Два вектора называют коллинарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинарным любому вектору.

Два одинаково направленных вектора называют сонаправленными ( $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ). Противоположно направленными векторами называются противоположно направленные

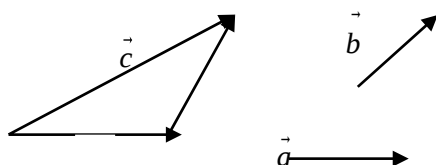
векторы ( $\vec{a} \uparrow \downarrow$ )

b). Определение 5. Два вектора называются равными, если они сонаправлены и равны по модулю, т.е. если  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$  и  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ , то  $\vec{a} = \vec{b}$ .

### 1. Сложение векторов.

Для того, чтобы построить сумму двух данных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , нужно выбирать произвольную точку А и отложить от нее вектор  $\vec{AB} = \vec{a}$ , а затем от точки В отложить вектор  $\vec{BC} = \vec{b}$ . Тогда вектор  $\vec{AC}$  является суммой:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} = \vec{c}$ . (1)

(1) – правило треугольника.

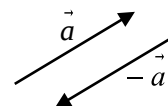


Свойства суммы векторов:

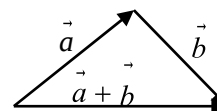
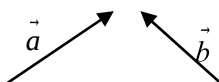
1.  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
2.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
3.  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

### 2. Вычитание векторов.

Два вектора называются противоположными, если их сумма равна нулевому вектору. Вектор, противоположный вектору  $\vec{a}$ , обозначается  $-\vec{a}$ .  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ .



Вектор  $\vec{c}$  называется разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ . Чтобы вычесть из вектора  $\vec{a}$  вектор  $\vec{b}$ , достаточно прибавить к вектору  $\vec{a}$  вектор, противоположный вектору  $\vec{b}$ , т.е.  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .



### 3. Умножение вектора на число.

Определение: Произведением ненулевого вектора  $\vec{a}$  на число  $m$  называется вектор, имеющий направление вектора  $\vec{a}$ , если  $m > 0$ , и противоположное направление, если  $m < 0$ .

Длина этого вектора равна произведению длины вектора  $\vec{a}$  на модуль числа  $m$  и обозначается  $m|\vec{a}|$ .

Основные свойства умножения вектора на число.

- $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$
- $m\vec{a} + n\vec{a} = (m+n)\vec{a}$
- $m\vec{a} + m\vec{b} = m(\vec{a} + \vec{b})$
- $0 * \vec{c} = m * \vec{0} = \vec{0}$

### 4. Разложение вектора по координатным осям.

Прямая, на которой выбрано положительное направление и задана единица измерения длины, называется осью.

Вектор  $\vec{e}$ , имеющий длину  $|\vec{e}| = 1$  и направление, совпадающее с направлением оси, называется единичным вектором (ортом) этой оси.

Два ненулевых вектора, взятых в определенном порядке называются базисом.

Разложение вектора  $\vec{a}$  в базисе  $(\vec{i}, \vec{j})$  имеет вид  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , где  $\vec{i}$  – единичный вектор

на оси  $OX$ ;  $j$  - единичный вектор на оси  $OY$ . Числа  $x$  и  $y$  – координаты вектора в базисе.

Если начало вектора  $\vec{a}$  находится в точке  $A(x_A; y_A)$ , а конец в точке  $B(x_B; y_B)$ , то разложение вектора  $\vec{a}$  записывается в виде  $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$ .

### Прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве. Действия над векторами, заданными координатами.

Если в базисе  $(i, j)$  заданы векторы  $\vec{a} = (x_1, y_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2)$ , то:

- Координаты суммы двух векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых; то есть  $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$  и в пространстве  $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$ .
- Координаты разности двух векторов равны разности соответствующих координат этих векторов, то есть  $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$  и в пространстве  $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$ .
- Координаты произведения вектора на число равны произведениям соответствующих координат данного вектора на это число, то есть  $m\vec{a} = (mx; my)$  и в пространстве  $m\vec{a} = (mx; my; mz)$ .

Условие коллинеарности двух векторов  $\vec{a} = (x_1, y_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2)$  имеет вид  $x_1 = mx_2$ ,  $y_1 = my_2$ , то есть если соответствующие координаты двух векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны.

Длина радиус-вектора  $\vec{a} = (x, y)$  находится по формуле  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , в пространстве  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

→ Длина вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$  находится по формуле:  
 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ . С помощью этой формулы вычисляется расстояние

между двумя точками на плоскости. Длина вектора в пространстве вычисляется по формуле:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Углы, образуемые вектором  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  с осями координат  $OX$  и  $OY$ , находятся по формулам:  $\cos \alpha = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$ ;  $\cos \beta = \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$ .

### Скалярное произведение двух векторов.

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается символом  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . Таким образом, по определению:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Основные свойства скалярного произведения:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (m \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m \cdot \vec{b})$

|                                                                                                                                                      |  |                                                                                                                                                                                                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/> 1979<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                               |
| Методические рекомендации                                                                                                                            |  | Стр. 41 из 116                                                                                                                                                                                                                              |

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш.Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов ЦБ Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Что такое вектор? Что такое нулевой вектор?
2. Что такое коллиенарный вектор?
3. Какие векторы называются равными векторами?
4. Что такое длина векторов?
5. Что такое скалярное умножение двух векторов?
6. Как определить угол между двумя векторами?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

#### Занятие № 15

#### 5.1. Тема: Уравнение прямой.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:** объяснить построение уравнений прямых, научить учащихся составлять уравнения прямой проходящей через две точки.

- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.

- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме.

- **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятий
- б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

#### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

|                                                                                                                                                                     |  |                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                               |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                         |
| Методические рекомендации                                                                                                                                           |  | Стр. 42 из 116                                                                                                                                                                                                                                        |

### **Уравнение прямой, проходящей через одну точку, через две точки.**

Определение. Уравнение первой степени относительно переменных  $x$  и  $y$ , т.е. уравнение вида  $Ax+By+C=0$ , при условии, что коэффициенты  $A$  и  $B$  одновременно не равны нулю, называется общим уравнением прямой.

Рассмотрим частные случаи общего уравнения прямой.

Угол  $\varphi$  между двумя прямыми, заданными каноническими уравнениями  $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}$

и  $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$ , вычисляется по формуле:  $\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}$ .

#### **5.4. Основные вопросы темы..**

##### **• Закрепление пройденного материала: 25 мин**

- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### **5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин**

- Основная:
- Дополнительная:

#### **5.6. Литература**

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### **а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин**

1. Уравнение прямой.
2. Уравнение прямой проходящей две точки.
3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/>             -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 43 из 116                                                                                                                                                                                                                                                                  |

## Занятие № 16

### 5.1. Тема: Производные функций

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока): комбинированный.**

### 5.2. Цель занятия:

- **образовательная:** дать понятие о производной функции, объяснить ее геометрический и физический смысл.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме.

- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятии
  - б) определение целей и задач занятия
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов

### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

#### Производная и ее геометрический и физический смысл. Касательная к графику функции.

Приращение аргумента. Приращение функции. Пусть функция  $y = f(x)$  определена в точках  $x$  и  $x_1$ . Разность  $x_1 - x$  называется приращением аргумента, а разность  $f(x_1) - f(x)$  называется приращением функции при переходе от значения аргумента  $x$  к значению аргумента  $x_1$ . Приращение аргумента обозначают  $\Delta x$ ; значит,  $\Delta x = x_1 - x$ , т.е.  $x_1 = x + \Delta x$ . Приращение функции обозначают  $\Delta f$  или  $\Delta y$ ; значит,

$$\Delta f = \Delta y = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Пример: Доказать, что для линейной функции  $y = kx + b$  справедливо равенство  $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Решение: Имеем  $f(x) = kx + b$ ,  $f(x + \Delta x) = k(x + \Delta x) + b$ . Значит,  $\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = k(x + \Delta x) + b - (kx + b) = k\Delta x$ , откуда получаем  $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , что и требовалось доказать.

#### Определение производной.

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в точке  $x$  и в некоторой окрестности этой точки. Пусть  $\Delta x$  - приращение аргумента, причем такое, что точка  $x + \Delta x$  принадлежит указанной окрестности точки  $x$ , а  $\Delta f$  - соответствующее приращение функции, т.е.  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ . Если существует предел отношения приращения функции  $\Delta f$  к приращению аргумента  $\Delta x$  при условии, что  $\Delta x \rightarrow 0$ , то функция  $y = f(x)$  называется

дифференцируемой в точке  $x$ , а этот предел называется значением производной функции  $f(x + \Delta x) - f(x)$ , где

всех таких точках  $x$ , в которых существует указанный выше предел; эту функцию называют производной функции  $y = f(x)$ .

Пример: Найти  $f'(2)$ , если  $f(x) = x^2$ .

Решение: Имеем

$$f(2) = 2^2 = 4; f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2. \Delta f = f(2 + \Delta x) - f(2) = (2 + \Delta x)^2 - 4 = 4\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\text{Тогда, } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x; \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4$$

Значит,  $f'(2) = 4$ .

Опираясь на определение, можно рекомендовать следующий план отыскания производной функции  $y = f(x)$ :

1. Фиксируем значение  $x$ , находим  $f(x)$ .
2. Даем аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , находим  $f(x + \Delta x)$ .
3. Вычисляем приращение функции  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ .
4. Составляем отношение  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ .
5. Находим предел отношения  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

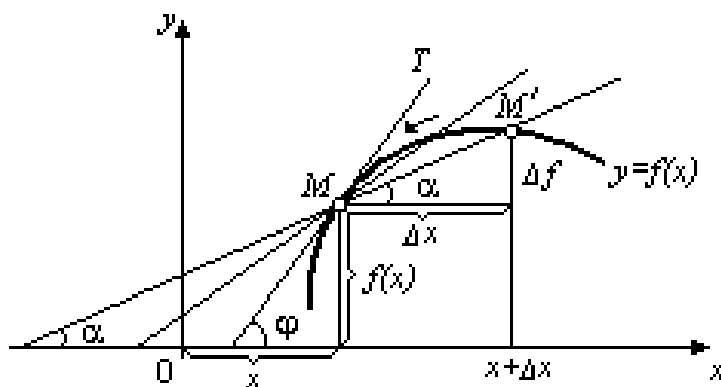
### Физический смысл производной.

Если  $S = S(t)$  - закон прямолинейного движения, то  $S'(t)$  выражает скорость движения в момент времени  $t$ , т.е.  $V = S'(t)$  (мгновенная скорость).

Например, закон свободного падения тела выражается зависимостью  $S = 0,5gt^2$ . Тогда скорость падения в момент  $t$  такова:  $V = S' = (0,5gt^2)' = 0,5g \cdot 2t = gt$

Вообще производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  выражает скорость изменения функции в точке  $x$ , т.е. скорость протекания процесса, описываемого зависимостью  $y = f(x)$ . В этом состоит физический смысл производной. Например, для функции  $y = x^2$  имеем  $f'(x) = 2x$ , при  $x = 2$  имеем  $f'(2) = 4$ , а при  $x = 3$  имеем  $f'(3) = 6$ . Это значит, что в точке  $x = 2$  функция изменяется в 4 раза быстрее аргумента, а в точки  $x = 3$  - в 6 раз быстрее.

### Геометрическое истолкование производной.



|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SOUTH KAZAKHSTAN</b><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 45 из 116                                                                                                                                                                                                                                                      |

Пусть кривая  $KL$ , представленная на рисунке 1, есть график функции  $y = f(x)$ . Отметим на ней две точки:  $M$  с координатами  $(x, y)$  и  $M_1$  с координатами  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ . Проведем отрезок  $MP$  параллельно оси абсцисс. В треугольнике  $MM_1P$   $MP = \Delta x$ ,  $M_1P = \Delta y$ . Поэтому отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  равно тангенсу угла  $\alpha$ , образованного секущей  $MM_1$  с осью абсцисс. При  $\Delta x \rightarrow 0$  точка  $M$  остается неподвижной, а  $M_1$  неограниченно приближается вдоль кривой к точке  $M$ . Секущая  $MM_1$  все это время меняет свое направление. Вместе с этим изменяется и угол  $\alpha$ . При этом  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$ .

В пределе хорда  $MM_1$  займет положение касательной  $MN$ , и образуя с осью абсцисс некоторый угол  $\beta$ . Очевидно, что при этом  $\beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha$ , и  $\operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha$ , но  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Следовательно,  $\operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ .

Таким образом, производная функции  $f(x)$  в точке  $x$  равна тангенсу угла наклона касательной к графику этой функции в точке с абсциссой  $x$ .

Операция нахождения производной называется дифференцированием

#### Правила дифференцирования

1.  $(C)' = 0$ .  $C = \text{const}$
2.  $(u + v - w)' = u' + v' - w'$
3.  $(u * v)' = u'v + uv'$
4.  $(c * u)' = c(u)'$ .  $C = \text{const}$
5.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
6.  $(x^n)'_x = nx^{n-1}$
7.  $(x)' = 1$

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш.Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов ЦБ Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень).

|                                                                                                            |  |                |                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p> ONTÜSTIK-KAZAQSTAN<br/> MEDISINA<br/> AKADEMIASY<br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  |                | <p> SOUTH KAZAKHSTAN<br/> MEDICAL<br/> ACADEMY<br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                      |  | 044-73/11-142  |                                                                                                       |
| Методические рекомендации                                                                                  |  | Стр. 46 из 116 |                                                                                                       |

М.Просвещение, 2018.

**а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и т.д.) 10 мин**

1. Что такое производная?
2. Производная и ее геометрический смысл
3. Производная и ее физический смысл.
4. Правила дифференцирования.
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

**Занятие № 17**

**5.1. Тема:** Производная сложной функции.

- **Количество учебных часов:** 135 мин
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

**5.2. Цель занятия:.**

- **образовательная:** научить учащихся нахождению производной сложных функций
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме.

- **Организационный момент:** 10 мин

- а) организация рабочей обстановки на занятий
- б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме:** 20 мин

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

**5.3. Задачи обучения.**

- **Объяснение новой темы:** 40 мин

**Сложная функция и ее дифференцирование.**

Сложной функцией считается такая функция, у которой аргумент также является функцией. Обозначается это таким образом:  $f(g(x))$ . Функция  $g(x)$  считается аргументом  $f(g(x))$ .

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Пусть имеем функцию вида:  $f=\sin x^2$ . Чтобы найти значение этой функции в фиксированной точке  $x$ , нужно:

- 1) вычислить  $x^2$ ;
- 2) найти значение синуса при полученном значении  $x^2$ .

В подобных случаях говорят, что задана сложная функция  $f(g(x))$  здесь  $g(x)=x^2$  и  $f=\sin(x)$

Пусть  $y=f(g(x))$ -сложная функция, причем функция  $u=g(x)$  дифференцируема в точке  $x$ , а функция  $y=f(u)$  дифференцируема в соответствующей точке  $u$ . Тогда функция  $y=f(g(x))$

|                                                                                                                                                                                   |  |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>         «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ       </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>         АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»       </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                             |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                         |  | Стр. 47 из 116                                                                                                                                                                                                                                                      |

Запись  $f'(g(x))$  означает, что производная вычисляется по формуле для  $f'(x)$ , но вместо  $x$  подставляется  $g(x)$ .

Пример. Найти производную функции.

$$y = \lg(x^2 + x + 1)$$

$$y' = (\lg(x^2 + x + 1))' = \frac{1}{\cos^2(x^2 + x + 1)} * (x^2 + x + 1)' = \frac{2x + 1}{\cos^2(x^2 + x + 1)}$$

Для нахождения производной степенной функции можно использовать правило нахождения производной от степенной функции не только для натуральных, но и для любых показателей, то есть для любого действительного числа  $n$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (x > 0)$$

Пример. Найти производную функции  $y = \frac{1}{x}$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Формула производной сложных функций.
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

#### Занятие № 18

#### 5.1. Тема: Производная степенной, показательной, логарифмической функции.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:

- **образовательная:** Ознакомить с производными степенной, показательной и

- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.

- **развивающая:** научить находить производные статических, показательных, логарифмических функций.

• **Организационный момент: 10 мин**

а) организация рабочей обстановки на занятиях

б) определение целей и задач занятия

• **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

а) проверить уровень базовых знаний студентов

### 5.3. Задачи обучения.

• **Объяснение новой темы: 40 мин**

Производная показательной и логарифмической функции:

1.  $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$

Пример.  $f(x) = 2 \cdot 3^x \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 3^x \ln 3$

2.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Пример.  $f(x) = \log_2 x = \frac{1}{x \ln 2}$

| Функция       | Производная               | Пример                                                                                                                              |
|---------------|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $C$           | $0$                       | $(5)' = 0; \left(\frac{2}{7}\right)' = 0$                                                                                           |
| $x$           | $1$                       |                                                                                                                                     |
| $x^n$         | $n \cdot x^{n-1}$         | $(x^7)' = 7x^6; \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ |
| $\sqrt{x}$    | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$     |                                                                                                                                     |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$          |                                                                                                                                     |
| $e^x$         | $e^x$                     |                                                                                                                                     |
| $a^x$         | $a^x \cdot \ln a$         | $(7^x)' = 7^x \cdot \ln 7$                                                                                                          |
| $\ln x$       | $\frac{1}{x}$             |                                                                                                                                     |
| $\log_a x$    | $\frac{1}{x \cdot \ln a}$ | $\log_3 x = \frac{1}{x \cdot \ln 3}$                                                                                                |

**Производная степенной функции с натуральным показателем. Производные суммы, произведения и частного двух функций.**

Производную степенной функции  $y = x^n$  находят по этой формуле:  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$  (1)

Действительно, так как  $x = e^{\ln x}$ , то  $x^n = e^{n \ln x}$ . Отсюда по правилу вычисления

производной сложной функции получаем:  $(x^n)' = (e^{n \ln x})' = e^{n \ln x} (n \ln x)' = x^n \cdot n \cdot \frac{1}{x} = n x^{n-1}$ .

|                                                                                                                                                                                   |  |                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>         «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ       </p> |  |  <p style="text-align: center;"> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>         АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»       </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                             |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                         |  | Стр. 49 из 116                                                                                                                                                                                                                                                 |

формула доказана.

*Примеры:* 1)  $y = 1 - 2x^2$

*Решение:*  $y' = (1 - 2x^2)' = (1)' - (2x^2)' = 0 - 2 \cdot 2x = -4x$

2)  $y = x - \sin x$

*Решение:*  $y' = (x - \sin x)' = (x)' - (\sin x)' = 1 - \cos x$

3)  $y = 3x^6 + \sqrt{x} + 2x^2 + \cos x$

*Решение:*

$$y' = (3x^6 + \sqrt{x} + 2x^2 + \cos x)' = (3x^6)' + (\sqrt{x})' + (2x^2)' + (\cos x)' = 18x^5 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 4x - \sin x$$

### Производные суммы, произведения и частного двух функций.

**Теорема 1:** Если функция  $u(x)$  и  $v(x)$  дифференцируемые, то их сумма  $w(x) = u(x) + v(x)$  также дифференцируема, причем  $w'(x) = u'(x) + v'(x)$ . (Производная от суммы двух функций равна сумме производных от этих функций)

**Теорема 2:** Постоянную величину можно выносить за знак производной.  $g(x) = c f(x)$ , где  $c$  - постоянная, то  $g'(x) = c f'(x)$ ,

**Теорема 3.** Производная произведения двух функции равна произведению производной от первой функции на вторую функцию плюс произведение первой функции на производную от второй функции:  $(uv)' = u'v + uv'$ .

**Теорема 4.** Если функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы, то в тех точках, в которых  $v$  отлично от нуля, отношение  $\frac{u}{v}$  также дифференцируемо и  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ . Не будем

приводить доказательство этих теорем, только покажем на некоторых примерах.

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Производные степенных функций.
2. Производные показательных функций .

|                                                                                                                                                      |  |                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> SOUTH KAZAKHSTAN<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                          |
| Методические рекомендации                                                                                                                            |  | Стр. 50 из 112                                                                                                                                                                                                                         |

3. Производные логарифмических функций.

- а) оценивание учащихся  
б) задание на дом

## №1 Рубежный контроль

1. Решите уравнение:

а)  $7x - 10 = 11$   $9 \cdot x + (x + 3) + 2(x + 3) = 27$

$\frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = \frac{5}{16}$   $10 \cdot (12x - 5x) - 4 = 14$

в)  $4$

2. Решите систему уравнений.

а).

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 80 \\ \log_2 x + \log_2 y = 5 \end{cases}$$

в)

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

с)

$$\begin{cases} \log_2(x + y) = 3 \\ \log_{15} x = 1 - \log_{15} y \end{cases}$$

3. Найдите пределы

а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x - 2}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{4x - 8}$

$\lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 + 3x + 4)$

с)  $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 + 2x + 4)$

д)  $\lim_{x \rightarrow 2}$

е)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 8x + 4}{5x^2 - 14x + 8}$

г)  $\lim_{x \rightarrow 5} \left( \frac{2x^2 + x - 15}{3x^2 - 7x - 6} \right)$

$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 2)$

ж)  $\lim_{x \rightarrow 4}$

4. Найдите производную функции.

1.  $y = \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x$

2.  $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$

3.  $y = \sin x e^{\cos x}$

4.  $y = \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} x}$

5.  $y = (1 + \sin^2 x)^4$

|                                                                                                                                                      |  |                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/> -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                 |
| Методические рекомендации                                                                                                                            |  | Стр. 51 из 112                                                                                                                                                                                                                                |

$$6. y = \arctg(x^2 - 3x + 2)$$

$$7. y = \frac{\ln x}{1 + x^2}$$

$$8. 10. y = e^x (\sin 3x - 3 \cos 3x)$$

### Занятие № 19

#### 5.1. Тема: Производные тригонометрических функций

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока): комбинированный.**

#### 5.2. Цель занятия:

- **образовательная:** научить учащихся находить производные тригонометрических функций.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научить учащихся применять производную функции по ее определению.

- **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятии
- б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

#### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

Правила нахождения производной тригонометрических функций:

$$1. (\sin x)' = \cos x,$$

$$2. (\sin u)' = \cos u \cdot u' \quad (1)$$

$$3. (\cos x)' = -\sin x$$

$$4. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$5. (\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$6. \left( \frac{1}{\operatorname{tg} u} \right)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$7. (\operatorname{ctg} x)' = \left( \frac{1}{\sin x} \right)' = \frac{\cos' x \sin x - \sin' x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$8. \left( \frac{1}{\operatorname{ctg} u} \right)' = \frac{u'}{\sin^2 u}$$

Например:

$$1) y = \frac{1}{2} \sin x + 2 \cos 3x \quad y' = \frac{1}{2} \cos x - 6 \sin 3x$$

|                                                                                                                                                                                   |  |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>         «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ       </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>         АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»       </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                             |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                         |  | Стр. 52 из 112                                                                                                                                                                                                                                                      |

$$2) y = x - \sin x : y' = (x - \sin x)' = (x)' - (\sin x)' = 1 - \cos x$$

$$4) y = 3x^6 + \sqrt{x} + 2x^2 + \cos x$$

$$y' = (3x^6 + \sqrt{x} + 2x^2 + \cos x)' = (3x^6)' + (\sqrt{x})' + (2x^2)' + (\cos x)' = 18x^5 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 4x - \sin x$$

### Производная обратно-тригонометрических функций.

Пусть дана функция  $y = f(x)$ . Если мы рассмотрим значения  $y$  как значения аргумента, а значения  $x$  как значения функции, то получим  $x = g(y)$  как функцию, обратную для функции  $y = f(x)$ . Найдем производную обратной функции  $x = g(y)$ , но  $y = f(x) \Rightarrow x = g(f(x))$ . (1)

Продифференцируем обе части равенства (1) по  $x$ :

$$1 = g'(y) \cdot f'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{g'(f(x))} \text{ при } g'(f(x)) \neq 0.$$

Таким образом, если для функции  $y = f(x)$  существует обратная  $x = g(y)$ , которая в рассматриваемой точке  $y$  имеет производную  $g'(y)$ , отличную от нуля, то в соответствующей точке  $x$  функция  $y = f(x)$  имеет производную  $f'(x)$ , равную  $\frac{1}{g'(y)}$ , т.е.

для обратных функций  $f(x)$  и  $g(y)$  справедлива формула  $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$  при  $g'(y) \neq 0$ .

Используя формулу (2) находим производную обратных тригонометрических функций.

$$1. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$1'. (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$2. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2'. (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$3. (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$3'. (\arctg u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$4. (\text{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$4'. (\text{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2} \text{ при } u = f(x)$$

Пример 1: Найти производную функции  $y = 2 \arcsin \sqrt{x}$  :

$$\text{Решение: } y' = (2 \arcsin \sqrt{x})' = \frac{2(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}};$$

Пример 2:  $y = (1+x^2)\arctg x$

$$\text{Решение: } y' = (1+x^2)'\arctg x + (1+x^2)(\arctg x)' = 2x\arctg x + (1+x^2)\frac{1}{1+x^2} = 2x\arctg x + 1$$

|                                                                                                                                                                                   |  |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>         «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ       </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>         АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»       </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                             |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                         |  | Стр. 53 из 112                                                                                                                                                                                                                                                      |

Пример 4: Найти производную функции  $f(x) = \arcsin 5x$

Решение:  $f'(x) = (\arcsin 5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} * (5x)' = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

Пример 5: Дана функция  $f(x) = 3 \arctg(3x+1)$ . Найдем производную этой функции.

Решение:  $f'(x) = (3 \arctg(3x+1))' = 3 * \frac{1}{1+(3x+1)^2} * (3x+1)' = \frac{9}{1+(3x+1)^2}$

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.5

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш.Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Что называется тригонометрической функцией?
2. Что такое аргумент?
3. Чему равна производная тригонометрической функции?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

### Занятие № 20

#### 5.1. Тема: Производная второго порядка и ее физический смысл.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:** объяснить учащимся физический смысл производной второго порядка путем решения задач.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме.

|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/>             -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 54 из 112                                                                                                                                                                                                                                                                  |

б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

а) проверить уровень базовых знаний студентов

### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

Пусть мы нашли для функции  $y=f(x)$  ее производную  $y' = f'(x)$ . Производная от этой производной называется *производной второго порядка* функции  $f(x)$ , или *второй производной*, и обозначается  $y''$ ,  $f''(x)$ .

Пример. Найти производную второго порядка функции  $y = x^3 - 4x + 13$ .

Решение: Для того чтобы найти вторую производную, вначале надо найти

производную первого порядка:  $y' = (x^3 - 4x + 13)'$

Согласно свойству линейности, имеем:

$$y' = (x^3)' - 4 \cdot (x)' + (13)' = 3x^2 - 4 \cdot 1 + 0 = 3x^2 - 4$$

Тогда искомая вторая производная:

$$y'' = (y')' = (3x^2 - 4)' = 3 \cdot (x^2)' - (4)' = 3 \cdot 2x - 0 = 6x$$

Ответ:  $y''=6x$

#### Физический смысл производной второго порядка.

Ускорение  $a$  в данный момент  $t=t_0$  есть производная  $\frac{dv}{dt}$  от скорости  $v$  по времени  $t$ , вычисленная при  $t=t_0$ . Ускорение является физическим смыслом второй производной  $S''(t) = a$ .

Пример: Точка движется прямолинейно по закону  $s = 2t^3 + t^2 - 4$ . Найти значения скорости и ускорения в момент времени  $t=4$ .

Решение: Найдем скорость движения точки в любой момент времени  $t$ :  
 $v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 + 2t$ . Вычислим скорость движения точки в момент времени  $t=4$ :

$$v(4) = 6 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 104 (м / с).$$

Найдем ускорение движения точки в любой момент времени  $t$ :  $a = \frac{dv}{dt} = 12t + 2$ .

Вычислим ускорение движения точки в момент времени  $t = 4$ :  $a(4) = 12 \cdot 4 + 2 = 50 (м / с^2)$ .

Пример: Найти скорость и ускорение точки, движущейся прямолинейно по закону  $s = 2\sin(\pi t / 3)$ , в момент времени  $t=1$ .

$$\text{Решение: } v = \frac{ds}{dt} = 2 \cos \frac{\pi t}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{3};$$

$$v(1) = \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3};$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi t}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi^2}{9} \sin \frac{\pi t}{3};$$

### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**

|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/>             SOUTH KAZAKHSTAN<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 55 из 112                                                                                                                                                                                                                                                                            |

- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

1. Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
2. А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
3. А.Ш.Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
4. Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
5. А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Что называется производной второго порядка?
2. Каков физический смысл производной второго порядка?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

### Занятие № 21

#### 5.1. Тема: Применение производной к построению графиков функций

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:** научить учащихся применять производную к построению графиков функций.

- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.

- **развивающая:** применять полученные навыки для решения задач.

- **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятий
- б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

#### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

#### Признаки возрастания, убывания и постоянства функции.

1<sup>0</sup>. а) Если для точек  $x_1$  и  $x_2$  интервала  $[a, b]$  из неравенства  $x_1 < x_2$  следует неравенство  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , то функция  $f(x)$  на интервале  $[a, b]$  *возрастающая*.

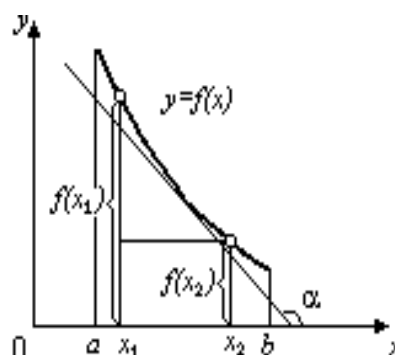
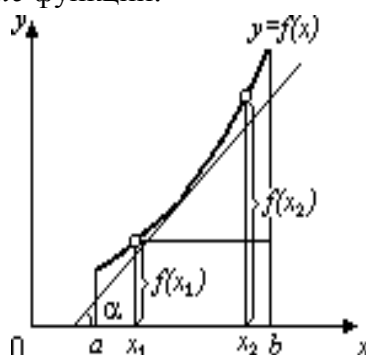
б) Если из неравенства  $x_1 < x_2$  следует  $f(x_1) < f(x_2)$ , то функция называется *строго возрастающей*.

2<sup>0</sup>. а) Если для точек  $x_1$  и  $x_2$  интервала  $[a, b]$  из неравенства  $x_1 < x_2$  следует  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , то  $f(x)$  на интервале  $[a, b]$  *убывающая* функция.

б) Если из неравенства  $x_1 < x_2$  следует  $f(x_1) > f(x_2)$ , то функция *строго убывающая*.

Возрастающие, строго возрастающие, убывающие, строго убывающие функции –

монотонные функции.



### Необходимое и достаточное условие возрастания и убывания функции.

**Теорема 1.** 1) Если дифференцируемая функция  $f(x)$  на интервале  $]a, b[$  возрастает, то в любой точке этого интервала

2) Если дифференцируемая функция  $f(x)$  на интервале  $]a, b[$  убывает, то в любой точке этого интервала

3) Если дифференцируемая функция  $f(x)$  на интервале  $]a, b[$  не изменяется, т.е. остается постоянной, то в любой точке этого интервала

**Теорема 2.** 1) Если производная функции  $f(x)$  на интервале  $]a, b[$  положительна, то функция  $f(x)$  на этом интервале *строго возрастает*.

2) Если производная функции  $f(x)$  на интервале  $]a, b[$  отрицательна, то  $f(x)$  на этом интервале *строго убывает*.

3) Если производная функции  $f(x)$  на интервале  $]a, b[$  равна нулю, то  $f(x)$  на этом интервале *не изменяется*.

Можно следующим алгоритмом находить промежутки с помощью производных любого дифференцирование возрастания, убывания и постоянства функции  $f(x)$ .

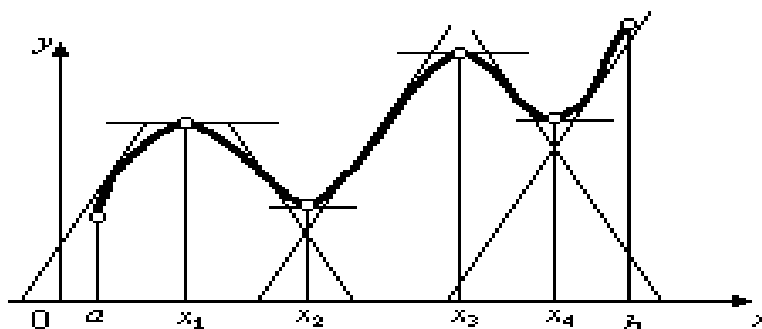
1. Найти области определения функций.
2. Найти производной функции.
3. Решать неравенства  $f'(x) > 0$  или  $f'(x) < 0$ .
4. Записать промежутки с помощью теоремы производных возрастания и убывания функции.

### Экстремум функции.

**Теорема 3.** Если дифференцируемая функция  $f(x)$  в точке имеет экстремум, то в той точке первая производная равна нулю: ( $\quad = 0$ ).

**Теорема 4.** Если у дифференцируемой функции  $f(x)$  в точке первая производная равна нулю и при переходе через эту точку производная меняет знак, то в точке имеется экстремум функции.

- а) если знак производной меняется с плюса (+) на минус (–), то имеется *максимум*;
- б) если знак производной меняется с минуса (–) на плюс (+), то имеется *минимум*.



### Нахождение экстремумов функции с помощью первой и второй производной.

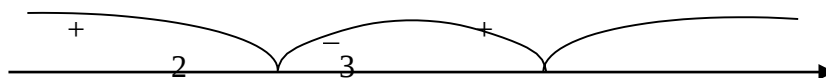
1. Найти производную  $f'(x)$
2. Найти критические точки функции  $y = f(x)$ , т.е. точки, в которых  $f'(x)$  обращается в нуль или терпит разрыв.
3. Исследовать знак производной  $f'(x)$  в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции  $f(x)$ . При этом критическая точка  $x_0$  есть точка минимума, если отделяет промежуток, в котором  $f'(x) < 0$ , от промежутка, в котором  $f'(x) > 0$ , и точка максимума – в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой  $x_0$ , знак производной не меняется, то в точке  $x_0$  функция экстремума не имеет.

**Определение.** Если  $y'$  есть производная от функции  $y = f(x)$ , то производная от  $y'$  по  $x$  называется *второй производной* (или *производной второго порядка*). Для второй производной употребляются следующие обозначения:  $y'', y''x, \frac{d^2 y}{dx^2}$  или  $f''(x), \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ .

**1-пример.**  $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$  найти экстремумы функции.

Решение :

1.  $y' = 6x^2 - 30x + 36$ ;  $y' = x^2 - 5x + 6$ .
2.  $x^2 - 5x + 6 = 0, x_1 = 2, x_2 = 3$  (критические точки).  
 $x_1 = 2, x_2 = 3$  определяем точки в координате.



3.  $y = (x - 2)(x - 3)$  знаки в промежутке производных.

$$y'(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 2 > 0$$

$$y'(2,5) = (2,5)^2 - 5 \cdot 2,5 + 6 = 6,25 - 12,5 + 6 = -0,25 < 0$$

$$y'(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2 > 0$$

$x_1 = 2$  точка максимума,  $x_2 = 3$  точка минимума.

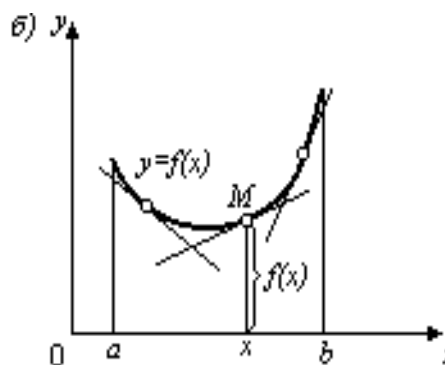
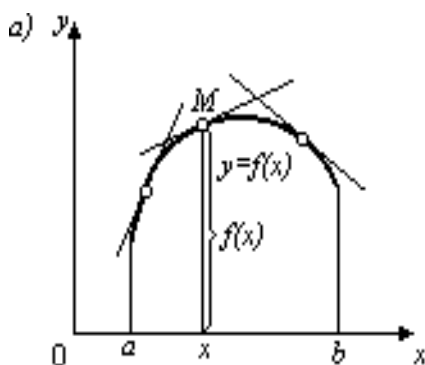
4. экстремумы функции.

В точке  $x_1 = 2$   $y_{\max}(2) = 2 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 + 1 = 29$ ;

любых точках интервала, то кривая *выпуклая*.

Если кривая  $y=f(x)$  расположена на интервале  $]a,b[$  выше касательных, проведенных в любых точках интервала, то кривая *вогнутая*.

**Теорема 5.** Если в любой точке интервала  $]a,b[$  вторая производная функции  $f(x)$  положительна, то кривая  $y=f(x)$  на данном интервале вогнута; если вторая производная функции  $f(x)$  отрицательна, то кривая  $y=f(x)$  выпукла.



**Теорема 6.** Если в точке  $(x_0)$  вторая производная равна нулю и при переходе через эту точку меняет знак, то точка  $x_0$  является *точкой перегиба*.

Алгоритм нахождения экстремума функции.

1. найти функцию;
2. решить уравнения  $f'(x) = 0$ ;
3. найти знаки производной  $f'(x)$  с помощью определения интервалов;
4. найти точки минимума и максимума используя достаточный признак точки экстремума.

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

|                                                                                                       |                                                                                   |                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/>MEDISINA<br/>AKADEMIASY<br/>«Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ</p> |  | <p>SOUTH KAZAKHSTAN<br/>MEDICAL<br/>ACADEMY<br/>АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»</p> |
| <p>Кафедра общеобразовательных дисциплин<br/>Методические рекомендации</p>                            |                                                                                   | <p>044-73/11-142<br/>Стр. 59 из 112</p>                                                          |

**а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и т.д.) 10 мин**

1. Функция в каком промежутке возрастает?
2. Функция в каком промежутке убывает?
3. Какой признак является достаточным признаком возрастания функции ?
4. Если функция  $f(x)$  определена в промежутке  $[a; b]$  будет ли  $x=a$  экстремум?
5. Признак максимума функции  $f$ .
6. Признак минимума функции  $f$ .
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

**Занятие № 22**

**5.1. Тема:** Дифференциал сложной функции.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

**5.2. Цель занятия:**

- **образовательная:** дать понятие дифференциала и его геометрического смысла.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научить находить дифференциал сложных функций и применять его к решению задач.

- **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятии
- б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

**5.3. Задачи обучения.**

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

Дифференциал функции.

Предел в определении производной заменим на положительное бесконечно малое

$$\alpha = h: \lim_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \text{ т. е. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha \Rightarrow \Delta y \quad (1)$$

В (1) формуле  $y' \Delta x$  –главная линейная часть приращения функций, а  $\alpha = h$  бесконечно малая величина. Итак,  $y' \Delta x$  – главную линейную часть приращение функции называют дифференциалом и обозначают:  $dy = y' \Delta x = y' dx, \Delta = d$

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента :  $dy = y' dx$ .

Основные свойства дифференциала:

Пусть  $u$  и  $v$  – дифференцируемые функции.

$$1. d(u \pm v) = du \pm dv \quad 2. d(uv) = v du + u dv \quad 3. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

Дифференциал сложной функции:

Пусть дана сложная функция  $Y = f(q(x)) = f(u)$ . Функция  $f(u)$  – дифференцируемая. Тогда дифференциал сложной функции равен:  $dy = df(q(x)) dq(x)$

Найти производные элементарных функций.

$$1. y = 1 - 2x^3; \quad 2. y = \frac{x+3}{x^2}; \quad 3. y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{3\sqrt{x}} + 5; \quad 4. y = x^2(4x+3); \quad 5. y = \tan x - \frac{\cos x}{3};$$

|                                                                                                                                                                                   |  |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>         «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ       </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>         АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»       </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                             |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                         |  | Стр. 60 из 112                                                                                                                                                                                                                                                      |

$$6. y=2\ln x+9e^x-\frac{ctqx}{6}; \quad 7. y=\frac{9x-1}{8}; \quad 8. y=(x^3+3)(x-1); \quad 9. y=\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}; \quad 10. y=3^x \cdot x^2.$$

Решение: 1.  $y=1-2x^3$ ,  $y'=?$   $y'=(1-2x^3)'=1'-(2x^3)'=0-2 \cdot 3x^2=6x^2$ .

В этой задаче находим производную разности:  $(u-v)'=u'-v'$ , здесь  $u=1$ ,  $v=2x^3$ .  $u'=1'=0$ ,  $v'=(2x^3)'=2(x^3)'=2 \cdot 3x^2=6x^2$ . При нахождении производной от  $(x^3)'$  использовали формулу  $(x^n)'$ , где  $n=3$  из чего  $(x^3)'=3x^2$ . И подставляя данные на свои места получим результат.

$$2. y=\frac{x+3}{x^2} \quad y'=? \quad \text{Это производная частного: } \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}, \text{ здесь } u=x+3, v=x^2, \text{ под-}$$

$$\text{ставляя в формулу получим: } y'=\left(\frac{x+3}{x^2}\right)'=\frac{(x+3)'x^2-(x+3)(x^2)'}{x^4}=\frac{1 \cdot x^2-(x+3) \cdot 2x}{x^4}=\frac{x^2+2x^2-6x}{x^4}=\frac{-x^2-6x}{x^4}.$$

$$3. y=2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+5, \quad y'=? \quad \text{Здесь используем формулу } (u+v)'=u'+v', \text{ Первое}$$

слагаемое  $2\sqrt{x}$ .  $\sqrt{x}$  запишем без корня, для этого использовали формулу:  $\sqrt[n]{x^n}=x^{\frac{n}{m}}$ , итак  $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ , а для второго слагаемого используем формулу  $\frac{1}{x^n}=x^{-n}$  и запишем:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=x^{-\frac{1}{3}}. \quad \text{Используя формулу } (x^n)'=nx^{n-1} \quad \text{и} \quad C'=0 \quad \text{решим:}$$

$$y'=(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+5)'=(2\sqrt{x})'-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'+5'=\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{2}})'-(x^{-\frac{1}{3}})'+0=x^{\frac{1-2}{2}}+x^{\frac{-1-3}{3}}=x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}.$$

$$4. y=x^2(4x+3), y'=? \quad \text{Чтобы вычислить воспользуемся формулами: } (uv)'=u'v+uv', \text{ здесь } u=x^2, v=4x+3. (uv)'=(x^2(4x+3))'=(x^2)'(4x+3)+x^2(4x+3)'=2x(4x+3)+x^2 \cdot 4=8x^2+6x+4x^2=12x^2+6x.$$

$$5. y=tqx-\frac{\cos x}{3}, y'=? \quad \text{В этом примере используем формулы: } (uv)'=u'v+uv' \text{ и } (Cu)'=Cu';$$

$$y'=(tqx-\frac{\cos x}{3})'=(tqx)'-\left(\frac{\cos x}{3}\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{3}(-\sin x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{3}\sin x=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{3}.$$

$$6. y=2\ln x+9e^x-\frac{ctqx}{6}, y'=? \quad \text{Здесь используем формулы производных элементарных}$$

$$\text{функций и производной произведения константы на функцию: } y'=(2\ln x)'+(9e^x)'-\left(\frac{ctqx}{6}\right)'=2\left(\ln x\right)'+9(e^x)'-\left(\frac{1}{6}ctqx\right)'=2-\frac{1}{6}+9e^x-\frac{1}{6}.$$

|                                                                                                       |                                                                                   |                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/>MEDISINA<br/>AKADEMIASY<br/>«Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ</p> |  | <p>SOUTH KAZAKHSTAN<br/>MEDICAL<br/>ACADEMY<br/>АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»</p> |
| <p>Кафедра общеобразовательных дисциплин<br/>Методические рекомендации</p>                            |                                                                                   | <p>044-73/11-142<br/>Стр. 61 из 112</p>                                                          |

$$y'=((x^3+3)(x-1))'=(x^3+3)'(x-1)+(x^3+3)(x-1)'=((x^3)'+3')(x-1)+(x^3)((x)'-1'))=3x^2(x-1)+(x^3)1=3x^3-3x^2+x^3+3=4x^3-3x^2+3.$$

8.  $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$   $y' = ?$  В этом примере используем формулы производных от тригонометрических функций и формулу  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ;  $u = \sin x - \cos x$ ,  $v = \sin x + \cos x$ .

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)' = \frac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} = \\ &= \frac{((\sin x)' - (\cos x)')(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)((\sin x)' + (\cos x)')}{(\sin x + \cos x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x - (-\sin x)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x))}{(\sin x + \cos x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \\ &= \frac{\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x + \cos x \sin x - \cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - \cos x \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} = \\ &= \frac{2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}. \end{aligned}$$

9.  $y = 3^x x^2$   $y' = ?$  Здесь нужны формулы  $(uv)' = u'v + uv'$ ,  $y = 3^x$ ,  $v = x^2$  и  $(a^x)' = a^x \ln a$ ,  $(x^n)' = nx^{n-1}$   $y' = (3^x x^2)' = (3^x)' x^2 + 3^x (x^2)' = 3^x \ln 3 x^2 + 3^x 2x = 3^x x^2 \ln 3 + 3^x 2x$

А теперь найдем дифференциалы этих 10 примеров. Для этого все найденные значения производных подставим в формулу дифференциала функции:  $dy = y' dx$ ,

$$1. y = 1 - 2x^3, y' = -6x^2 \Rightarrow dy = (-6x^2) dx = -6x^2 dx.$$

$$2. y = \frac{x+3}{x^2}, y' = \frac{-x^2-6x}{x^4} \Rightarrow dy = \frac{-x^2-6x}{x^4} dx.$$

$$3. y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 5, y' = x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow dy = (x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}) dx.$$

$$4. y = x^2 4x + 3, y' = 12x^2 + 6x \Rightarrow dy = (12x^2 + 6x) dx.$$

$$5. y = \tan x - \frac{\cos x}{3}, y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{3} \Rightarrow dy = \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{3} \right) dx.$$

$$6. y = 2 \ln x + 9e^x - \frac{ctgx}{6}, y' = \frac{2}{x} + 9e^x + \frac{1}{6 \sin^2 x} \Rightarrow dy = \left( \frac{2}{x} + 9e^x + \frac{1}{6 \sin^2 x} \right) dx.$$

$$7. y = \frac{9x-1}{9}, y' = \frac{9}{9} \Rightarrow dy = dx.$$

|                                                                                                                                                      |  |                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> SOUTH KAZAKHSTAN<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                          |
| Методические рекомендации                                                                                                                            |  | Стр. 62 из 112                                                                                                                                                                                                                         |

$$10. y = 3^x \cdot x^2, y' = 3^x \ln 3x^2 + 3^x 2x, \Rightarrow dy = (3^x \ln 3x^2 + 3^x 2x) dx.$$

Рассмотрим нахождение производных и дифференциалов от сложных функций:

Даны следующие функции: 1.  $y = (4x+1)^2$ ; 2.  $y = \sqrt{1+x^2}$ ;

3.  $y = \sin^3 x$ ; 4.  $y = \cos^2 \frac{x}{2}$ ; 5.  $y = \frac{\sin 2x}{\cos 3x}$ ; 6.  $y = \ln x^2$ ; 7.  $y = \operatorname{arctg}(x+4)$ ;

8.  $y = e^{\sqrt{x}}$ ; 9.  $y = \arcsin^2(x^3+1)$ ; 10.  $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^3(5x^2+6)$ .

*Решения:*

1.  $y = (4x+1)^2$ , здесь  $u = 4x+1$ , а  $y = u^2$  и формула  $(x^m)' = nx^{n-1}$ . Подставим в эту формулу:  $y' = 2u u' = 2(4x+1)(4x+1)' = 2(4x+1)((4x)' + 1') = 2(4x+1)4 = 8(4x+1)$ .

А дифференциал равен  $dy = 8(4x+1)dx$ .

2.  $y = \sqrt{1+x^2}$ , здесь  $u = 1+x^2$ . Рассмотрим функцию  $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ ;

$$Y' = (u^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} u' = \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} (1+x^2)' = \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} (2x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot dx.$$

3.  $y = \sin^3 x$ . Здесь  $u = \sin x$ , а  $y = u^3$  соответственно найдем производную:  $y' = (u^3)' = 3u^2 u' = 3(\sin x)^2 (\sin x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$ , а  $dy = 3\sin^2 x \cdot \cos x dx$ .

4.  $y = \cos^2 \frac{x}{2}$ , здесь  $u = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \cos^2 u$  и воспользуемся формулами  $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$  и  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$  получим:  $Y' = (\cos^2 u)' = 2 \cos u (\cos u)' = 2 \cos u (-\sin u) u' =$   
 $= 2 \cos \frac{x}{2} \left( -\sin \frac{x}{2} \right) \left( \frac{x}{2} \right)' = -2 \cos \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$ ;  $dy = -\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} dx$ .

5.  $y = \frac{\sin 2x}{\cos 3x}$ . Здесь используем формулу производных от тригонометрических функций и формулу  $\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ . Положим  $u = \sin 2x$ ,  $v = \cos 3x$ , так как  $u = \sin 2x$ ,  $v = \cos 3x$ , сложные функции:  $u = \sin 2x$ ,  $2x = a \Rightarrow y = \sin a$ ,  $u' = (\sin a)' = (\sin a)' a' = \cos a \cdot a' =$   
 $= \cos 2(2x)' = \cos 2x \cdot 2$ , аналогично и в функции  $v = \cos 3x$ ,  $3x = b \Rightarrow v = \cos b$ ,

|                                                                                                                                                                                   |                                                                                   |                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>         «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ       </p> |  | <p style="text-align: center;"> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>         АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»       </p> |
| <p style="text-align: center;">Кафедра общеобразовательных дисциплин</p>                                                                                                          |                                                                                   | <p style="text-align: center;">044-73/11-142</p>                                                                                                                             |
| <p style="text-align: center;">Методические рекомендации</p>                                                                                                                      |                                                                                   | <p style="text-align: center;">Стр. 63 из 112</p>                                                                                                                            |

6.  $y = \ln x^2$ , положим, что  $u = x^2$ , тогда возьмем производную от  $y = \ln u$ .  
 $y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} u' = \frac{1}{x^2} (x^2)' = \frac{1}{x^2} 2x = \frac{2}{x}$  и  $dy = \frac{2}{x} dx$ .

7.  $y = \arctan(x+4)$ ,  $u = x+4 \Rightarrow y = \arctan u$  и получим:

$$y' = (\arctan u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u' = \frac{1}{\cos^2(x+4)} (x+4)' = \frac{1}{\cos^2(x+4)} [x' + 4'] = \frac{1}{\cos^2(x+4)}, dy = \frac{1}{\cos^2(x+4)} dx.$$

8.  $y = e^{\sqrt{x}}$ , здесь  $\sqrt{x} = u \Rightarrow y = e^u$  следовательно производная:

$$y' = (e^u)' = e^u u' = e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x})' = e^{\sqrt{x}} \left( x^{\frac{1}{2}} \right)' = e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}, dy = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx.$$

9.  $y = \arcsin^2(x^3 + 1)$ . Здесь  $x^3 + 1 = u$ , а  $y = \arcsin^2 u$ . Теперь используем последовательно формулы  $(u^n)' = nu^{n-1}u'$  и  $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ :  $\left( \arcsin^2 u \right)' = 2 \arcsin u (\arcsin u)' =$   
 $= 2 \arcsin(x^3 + 1) \frac{1}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}} (x^3 + 1)' = 2 \arcsin(x^3 + 1) \frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}} = \frac{6x^2 \arcsin(x^3 + 1)}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}}.$

$$dy = \frac{6x \arcsin(x^3 + 1)}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}} dx.$$

10.  $y = \frac{1}{2} \arctan^3(5x^2 + 6)$ . Здесь как и в предыдущей задаче  $5x^2 + 6 = u$ ,  $y = \frac{1}{2} \arctan^3 u$   
 $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ , и  $(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$  и получим:  $(y)' = \left( \frac{1}{2} \arctan^3 u \right)' = \frac{1}{2} \left( \arctan^3 u \right)' = \frac{1}{2} 3 \arctan^2 u (\arctan u)' =$   
 $= \frac{3}{2} \arctan^2(5x^2 + 6) \frac{(5x^2 + 6)'}{1+(5x^2+6)^2} = \frac{3}{2} \arctan^2(5x^2 + 6) \frac{10x}{1+(5x^2+6)^2}.$

$$dy = \frac{3}{2} \arctan^2(5x^2 + 6) \frac{10x}{1+(5x^2+6)^2} dx.$$

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- Закрепление пройденного материала: 25 мин
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

1. Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
2. А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
3. А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
4. Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая

|                                                                                                                                                      |  |                                                                                                                                                                                                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/> 1979<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                               |
| Методические рекомендации                                                                                                                            |  | Стр. 64 из 116                                                                                                                                                                                                                              |

статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К.

Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с

- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

**а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин**

1. Что такое дифференциал?
2. Основные свойства дифференциала.
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

**Занятие № 23**

**5.1. Тема:** Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

**5.2. Цель занятия:**

- **образовательная:** дать понятия первообразной и неопределенного интеграла, привести основные свойства неопределенного интеграла; научить учащихся применять метод непосредственного интегрирования.

- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.

- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме.

- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятий
  - б) определение целей и задач занятия
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов

**5.3. Задачи обучения.**

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

Определение 1. Функция  $F$  называется первообразной для функции  $f$  на заданном промежутке, если для всех  $x$  из этого промежутка  $F'(x) = f(x)$ .

Определение 2. Задача интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все ее первообразные.

**Основное свойство первообразной.**

**Теорема.** Любая первообразная для функции  $f$  на промежутке  $I$  может быть записана в виде  $F(x) + C$ , где  $F(x)$  - одна из первообразных для функции  $f(x)$  на промежутке  $I$ , а  $C$  - произвольная постоянная.

**Неопределенный интеграл.**

Определение 3. Множество всех первообразных функции для функции  $f(x)$

3.  $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C, \quad a \neq 0$

**Таблица неопределенных интегралов:**

1  $\int 0 dx = C$

2  $\int 1 dx = x + C$

3  $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad (r \neq -1)$

4  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

5  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

6  $\int e^x dx = e^x + C$

7  $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8  $\int \cos x dx = \sin x + C$

9  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$

10  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

11  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases}$

12  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$

13  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}$

14  $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases}$

Пример 1. Функция  $\left(\frac{x}{3}\right)^3$  есть первообразная для функции  $f(x) = x^2$  на интервале

$(-\infty; \infty)$ , так как  $F(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}x^3$ ,  $F'(x) = \frac{1}{9}x^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{3}x^2 = f(x)$  для всех  $x \in (-\infty; \infty)$ .

Легко заметить, что  $\frac{x^3}{3} + 7$  имеет ту же самую производную  $x^2$  и поэтому также является первообразной для  $x^2$  на  $R$ . Ясно, что вместо числа 7 можно поставить любую постоянную. Таким образом, мы видим, что задача нахождения первообразной имеет бесконечно много решений.

**5.4. Основные вопросы темы..**

**• Закрепление пройденного материала: 25 мин**

- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

**5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин**

- Основная:
- Дополнительная:

**5.6. Литература**

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К.

|                                                                                                                                                      |  |                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> ONTÜSTIK-KAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/> -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                 |
| Методические рекомендации                                                                                                                            |  | Стр. 66 из 116                                                                                                                                                                                                                                |

Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с

- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

**а. Контроль (вопросы, тесты,задачи и тд.) 10 мин**

1. Что такое первообразная функция?
2. В чем отличие производной от первообразной?
3. Правила нахождения первообразной функции
4. Что такое интегрирование?

- а) оценивание учащихся
- б) задание на дом

**Занятие № 24**

**5.1. Тема:** Нахождение неопределенного интеграла.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

**5.2. Цель занятия:.**

- **образовательная:** дать понятия первообразной и неопределенного интеграла, привести основные свойства неопределенного интеграла.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** применять метод непосредственного интегрирования для решения задач.

- **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятий
- б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

**5.3. Задачи обучения.**

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

При нахождении неопределенных интегралов подынтегральную функцию сводят к одной из табличных функций. Если подынтегральная функция  $f(x)$  не может быть непосредственно преобразована к одной из табличных функций, то можно использовать метод внесения под дифференциал, метод замены переменной или интегрирование по частям.

В данном уроке рассмотрим метод непосредственного интегрирования. Несомненно, основным методом нахождения первообразной функции является непосредственное интегрирование с использованием таблицы первообразных и свойств неопределенного интеграла. Все другие методы используются лишь для приведения исходного интеграла к табличному виду.

Пример 1. Пусть  $f(x) = x^3$ .

Тогда первообразная  $F(x)$  имеет вид  $F(x) = \frac{x^4}{4}$ , так как  $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x)$ .

Пример 2.  $f(x) = \sin 3x$ .

|                                                                                                                                                                     |  |                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                               |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                         |
| Методические рекомендации                                                                                                                                           |  | Стр. 67 из 116                                                                                                                                                                                                                                        |

Тогда первообразная  $F(x)$  имеет вид  $F(x) = -\frac{1}{3} \cos 3x$ , так как

$$F'(x) = \left( -\frac{1}{3} \cos 3x \right)' = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (-\sin 3x) = \sin 3x = f(x).$$

Найдите общий вид первообразных для функции  $f$

а)  $f(x) = 2 - x^3 + \frac{1}{x^3}$                       б)  $f(x) = x - \frac{2}{x^5} + \cos x$

в)  $f(x) = (2x - 3)^5$                       г)  $f(x) = 3 \sin 2x$

д)  $f(x) = \frac{3}{(4 - 15x)^4}$                       е)  $f(x) = \frac{2}{x^5} + \frac{1}{\cos^2(3x - 1)}$

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Свойства непорядоченного интеграла
2. Формулы интегрирования.
3. Метод непосредственного интегрирования.
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

#### Занятие № 25

#### 5.1. Тема: Методы нахождения неопределенного интеграла. Метод замены переменной.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:** показать применение метода замены переменной.

|                                                                                                              |                                                                                   |                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br><b>MEDISINA<br/>         AKADEMIASY</b><br>«Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ |  | SOUTH KAZAKHSTAN<br><b>MEDICAL<br/>         ACADEMY</b><br>АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин<br>Методические рекомендации                                           |                                                                                   | 044-73/11-142<br>Стр. 68 из 116                                                                         |

• **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятий
- б) определение целей и задач занятия

• **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

**5.3. Задачи обучения.**

• **Объяснение новой темы: 40 мин**

Суть метода заключается в том, что мы вводим новую переменную, выражаем подынтегральную функцию через эту переменную, в результате приходим к табличному (или более простому) виду интеграла.

Очень часто метод подстановки выручает при интегрировании тригонометрических функций и функций с радикалами.

Пример. Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{1}{x\sqrt{2x-9}} dx$ .

Введем новую переменную  $z = \sqrt{2x-9}$ . Выразим  $x$  через  $z$ :

$$z^2 = 2x - 9 \Rightarrow x = \frac{z^2 + 9}{2} \Rightarrow$$

$$dx = d\left(\frac{z^2 + 9}{2}\right) = \left(\frac{z^2 + 9}{2}\right)' dz = \frac{1}{2} \cdot 2z dz = z dz$$

Выполняем подстановку полученных выражений в исходный интеграл:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \int \frac{z dz}{\frac{z^2 + 9}{2} \cdot z} = 2 \int \frac{dz}{z^2 + 9}$$

Из таблицы первообразных имеем  $2 \int \frac{dz}{z^2 + 9} = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{z}{3} + C$ .

$$\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{z}{3} + C = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C$$

Осталось вернуться к исходной переменной  $x$ :

Очень часто метод подстановки используется при интегрировании тригонометрических функций. К примеру, использование универсальной тригонометрической подстановки позволяет преобразовать подынтегральное выражение к дробно рациональному виду.

Метод подстановки позволяет объяснить правило интегрирования

$$\int f(k \cdot x + b) dx = \frac{1}{k} \cdot F(k \cdot x + b) + C$$

Вводим новую переменную  $z = k \cdot x + b$ , тогда

$$x = \frac{z}{k} - \frac{b}{k} \Rightarrow dx = d\left(\frac{z}{k} - \frac{b}{k}\right) = \left(\frac{z}{k} - \frac{b}{k}\right)' dz = \frac{dz}{k}$$

Подставляем полученные выражения в исходный интеграл:

$$\int f(k \cdot x + b) dx = \int f(z) \cdot \frac{dz}{k} = \frac{1}{k} \cdot \int f(z) dz = \frac{1}{k} \cdot (F(z) + C_1) = \frac{F(z)}{k} + \frac{C_1}{k}$$

|                                                                                                                          |  |                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p> ONTÜSTIK-KAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p> <br/> SOUTH KAZAKHSTAN<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                    |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                              |
| Методические рекомендации                                                                                                |  | Стр. 69 из 116                                                                                                                                                                                             |

Если принять  $\frac{C_1}{k} = C$  и вернуться к исходной переменной  $x$ , то получим

$$\frac{F(z)}{k} + \frac{C_1}{k} = \frac{1}{k} \cdot F(kx + b) + C$$

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш.Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Свойства неопределенного интеграла
2. Формулы интегрирования.
3. Метод замены переменной.
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

### Занятие № 26

#### 5.1. Тема: Методы нахождения неопределенного интеграла. Метод интегрирования по частям.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:** показать применение метода интегрирования по частям.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научить применять метод интегрирования по частям в решении задач.

- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятии
  - б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов

#### 5.3. Задачи обучения.

• **Объяснение новой темы: 40 мин**

**Метод интегрирования по частям** позволяет свести исходный неопределенный интеграл к более простому виду либо к табличному интегралу. Этот метод наиболее часто применяется, если подынтегральная функция содержит логарифмические, показательные, обратные тригонометрические, тригонометрические функции, а также их комбинации.

Формула интегрирования по частям:

$$\int f(x)dx = \int u(x)d(v(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x))$$

То есть, подынтегральное выражение  $f(x)dx$  представляем в виде произведения функции  $u(x)$  на  $d(v(x))$  - дифференциал функции  $v(x)$ . Далее находим функцию  $v(x)$  (чаще всего методом непосредственного интегрирования) и  $d(u(x))$  - дифференциал функции  $u(x)$ . Подставляем найденные выражения в формулу интегрирования по частям и исходный

неопределенный интеграл сводится к разности  $u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x))$ . Последний неопределенный интеграл может быть взят с использованием любого метода интегрирования, в том числе и метода интегрирования по частям.

В качестве примера найдем множество первообразных функции логарифма.

Найти неопределенный интеграл  $\int \ln(x)dx$

Решение.

Найдем этот неопределенный интеграл методом интегрирования по частям. В качестве функции  $u(x)$  возьмем  $\ln(x)$ , а в качестве  $d(v(x))$  оставшуюся часть подынтегрального выражения, то есть  $dx$ .

Имеем,  $\ln(x)dx = u(x)d(v(x))$ , где  $u(x) = \ln(x)$ ,  $d(v(x)) = dx$ .

Дифференциал функции  $u(x)$  есть  $d(u(x)) = u'(x)dx = \frac{dx}{x}$ , а функция  $v(x)$  - это  $v(x) = \int d(v(x)) = \int dx = x$ .

ПРИМЕЧАНИЕ: константу  $C$  при нахождении функции  $v(x)$  считают равной нулю.

Теперь все подставляем в формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int \ln(x)dx &= u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x)) : \\ &= \ln(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = \ln(x) \cdot x - \int dx = \ln(x) \cdot x - (x + C_1) = \\ &= x(\ln(x) - 1) + C, \text{ где } C = -C_1 \end{aligned}$$

Ответ:  $\int \ln(x)dx = x(\ln(x) - 1) + C$ .

Самое сложное, что есть в этом методе - это правильно определить, какую часть подынтегрального выражения брать за  $u(x)$ , а какую за  $d(v(x))$ .

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример. Найти множество первообразных функции  $f(x) = (x+1)\sin(2x)$ .

Решение. Неопределенный интеграл  $\int (x+1)\sin(2x)dx$  можно взять методом интегрирования по частям. В качестве функции  $u(x)$  следует взять  $x+1$ , тогда  $d(v(x)) =$

$\sin(2x)dx$ . Следовательно,  $d(u(x)) = d(x+1) = dx$ , а с помощью непосредственного

$$v(x) = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x)$$

интегрирования получаем

Выполняем подстановку в формулу интегрирования по частям:

$$\int (x+1) \sin(2x) dx = u(x)v(x) - \int v(x) d(u(x)) =$$

$$= (x+1) \left( -\frac{1}{2} \cos(2x) \right) - \int \left( -\frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} (x+1) \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) d(x) =$$

$$= -\frac{1}{2} (x+1) \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

$$\text{Ответ: } \int (x+1) \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} (x+1) \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

Пример. Найдите множество первообразных функции  $(x+1)\ln(2x)$ .

Решение. При интегрировании по частям примем  $u(x) = \ln(2x)$ ,  $d(v(x)) = (x+1)dx$ , тогда

$$d(u(x)) = (\ln(2x))' dx = \frac{1}{2x} (2x)' dx = \frac{dx}{x} \quad \text{и} \quad v(x) = \int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x$$

Подставляем в формулу интегрирования по частям:

$$\int (x+1) \ln(2x) dx = u(x)v(x) - \int v(x) d(u(x)) =$$

$$= \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \ln(2x) - \int \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \frac{dx}{x} =$$

$$= \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \ln(2x) - \int \left( \frac{x}{2} + 1 \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \ln(2x) - \frac{1}{2} \int x dx - \int dx =$$

$$= \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \ln(2x) - \frac{x^2}{4} - x + C$$

$$\text{Ответ: } \int (x+1) \ln(2x) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \ln(2x) - \frac{x^2}{4} - x + C$$

Пример. Найти неопределенный интеграл  $\int e^x \sin(2x) dx$ .

Решение.

$$\begin{aligned}
 \int e^x \sin(2x) dx &= \left\{ \begin{aligned} u(x) &= \sin(2x), & d(v(x)) &= e^x dx \\ d(u(x)) &= 2 \cos(2x) dx, & v(x) &= \int e^x dx = e^x \end{aligned} \right\} = \\
 &= u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x)) = \sin(2x)e^x - \int e^x \cdot 2 \cos(2x) dx = \\
 &= \sin(2x)e^x - 2 \int e^x \cos(2x) dx = \left\{ \begin{aligned} u(x) &= \cos(2x), & d(v(x)) &= e^x dx \\ d(u(x)) &= -2 \sin(2x) dx, & v(x) &= \int e^x dx = e^x \end{aligned} \right\} = \\
 &= \sin(2x)e^x - 2 \left( \cos(2x)e^x - \int (e^x (-2 \sin(2x) dx)) \right) = \\
 &= \sin(2x)e^x - 2 \cos(2x)e^x - 4 \int e^x \sin(2x) dx \\
 \int e^x \sin(2x) dx &= \sin(2x)e^x - 2 \cos(2x)e^x - 4 \int e^x \sin(2x) dx
 \end{aligned}$$

Что мы имеем в итоге:

Интегралы в левой и правой частях равенства совпадают, поэтому можно привести подобные слагаемые:

$$5 \int e^x \sin(2x) dx = \sin(2x)e^x - 2 \cos(2x)e^x \Rightarrow \int e^x \sin(2x) dx = \frac{1}{5} \sin(2x)e^x - \frac{2}{5} \cos(2x)e^x + C$$

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Свойства непоредленного интеграла
2. Формулы интегрирования.
3. Метод интегрирования по частям..
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

## Занятие № 27

### 5.1. Тема: Определенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

### 5.2. Цель занятия:

- **образовательная:** дать понятие об определенном интеграле и показать его геометрический смысл; показать основные свойства и вычисление определенного интеграла.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме.

#### • **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятии
- б) определение целей и задач занятия

#### • **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

### 5.3. Задачи обучения.

#### • **Объяснение новой темы: 40 мин**

Определенным интегралом от  $a$  до  $b$  непрерывной функции  $y=f(x)$ , определенной на интервале  $[a;b]$ , называется приращение первообразной  $F(x)$  для этой функции, то есть

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Числа  $a$  и  $b$  называются нижним и верхним пределами интегрирования.

Геометрический смысл определенного интеграла:

Площадь  $S$  криволинейной трапеции (фигуры, ограниченной графиком непрерывной положительной на интервале  $[a;b]$  функции  $y=f(x)$ , осью  $OX$  и прямыми  $x=a$  и  $x=b$

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

вычисляется по формуле



### Основные свойства и вычисление определенного интеграла.

$$1^0. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2^0. \int_a^a dx = b - a$$

$$30. \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$40. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$5^0. \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, \text{ мұндағы } k - \text{const}$$

$$6^0. \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

| Методы вычисления           | Формула                                                                                                                                                      | Пример                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Формула Ньютона-Лейбница    | $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big _a^b = F(b) - F(a);$ где $F'(x) = f(x)$                                                                                         | $\int_e^{e^2} \frac{\ln x dx}{x} = \int_e^{e^2} \ln x d(\ln x) = \frac{(\ln x)^2}{2} \Big _e^{e^2} = \frac{(\ln e^2)^2}{2} - \frac{(\ln e)^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$                          |
| Интегрирование по частям    | $\int_a^b u dv = uv \Big _a^b - \int_a^b v du$                                                                                                               | $\int_0^\pi x \cos x dx = x \sin x \Big _0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = \pi \sin \pi + \cos x \Big _0^\pi = \cos \pi - \cos 0 = -2$                                                                        |
| Интегрирование подстановкой | $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ \varphi(\alpha) = a \\ \varphi(\beta) = b \end{cases}$ | $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = \int_{x=3}^{x=8} \frac{2tdt = dx}{t^2 = x+1} = \int_{t=2}^3 \frac{t^2 - 1}{t} 2tdt = 2 \int_2^3 (t^2 - 1)dt = 2 \left[ \frac{t^3}{3} - t \right]_2^3 = 10 \frac{2}{3}$ |

Пример 1. Вычислить  $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ .

Решение: Для функции  $f(x) = (2x+3)^{-1}$  первообразной является  $F(x) = 0,5 \ln |2x+3|$ .

Значит  $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2} \ln |2x+3| \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 7 - \ln 5) = \frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$ .

Пример 2. Вычислить  $\int_1^2 (2x^3 + x^2 + 1)dx$ .

Решение: Воспользовавшись правилами 1<sup>0</sup> и 2<sup>0</sup>, получим:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (2x^3 + x^2 + 1)dx &= \int_1^2 2x^3 dx + \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 dx = 2 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_1^2 + \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 + x \Big|_1^2 = \left( \frac{2^4}{2} - \frac{1^4}{2} \right) + \left( \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) + (2-1) \\ &= \frac{15}{2} + \frac{7}{3} + 1 = \frac{15+7+2}{2} = \frac{24}{2} = 12 \end{aligned}$$

|                                                                                                                                                      |  |                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/> -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                 |
| Методические рекомендации                                                                                                                            |  | Стр. 75 из 116                                                                                                                                                                                                                                |

**Пример 3.** Вычислить  $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx$ .

**Решение:**  $\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ ;

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_{\pi/6}^{\pi/4} dx = \operatorname{tg} x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} - x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4(3 - \sqrt{3}) - \pi}{12}.$$

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Что такое определенный интеграл?
2. Геометрический смысл определенного интеграла
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

#### Занятие № 28

#### 5.1. Тема: Методы вычисления определенных интегралов. Метод замены переменной.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:**

- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.

- **развивающая:**

- **Организационный момент: 10 мин**
- а) организация рабочей обстановки на занятии
- б) определение целей и задач занятия

|                                                                                                                                                                                   |  |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>         «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ       </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>         АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»       </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                             |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                         |  | Стр. 76 из 116                                                                                                                                                                                                                                                      |

а) проверить уровень базовых знаний студентов

### 5.3. Задачи обучения.

#### • Объяснение новой темы: 40 мин

При вычислении определенных интегралов с использованием формулы Ньютона-Лейбница предпочтительно не сильно разграничивать этапы решения задачи (нахождение первообразной подынтегральной функции, нахождение приращения первообразной). Такой подход, использующий, в частности, формулы замены переменной и интегрирования по частям для определенного интеграла, обычно позволяет упростить запись решения.

**Теорема.** Пусть функция  $\varphi(t)$  имеет непрерывную производную на отрезке  $[\alpha, \beta]$ ,  $a=\varphi(\alpha)$ ,  $b=\varphi(\beta)$  и функция  $f(x)$  непрерывна в каждой точке  $x$  вида  $x=\varphi(t)$ , где  $t \in [\alpha, \beta]$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Тогда справедливо следующее равенство:

Эта формула носит название формулы замены переменной в определенном интеграле.

Подобно тому, как это было в случае неопределенного интеграла, использование замены переменной позволяет упростить интеграл, приблизив его к табличному (табличным). При этом в отличие от неопределенного интеграла в данном случае нет необходимости возвращаться к исходной переменной интегрирования. Достаточно лишь найти пределы интегрирования  $\alpha$  и  $\beta$  по новой переменной  $t$  как решение относительно переменной  $t$  уравнений  $\varphi(t)=a$  и  $\varphi(t)=b$ . На практике, выполняя замену переменной, часто начинают с того, что указывают выражение  $t=\psi(x)$  новой переменной через старую. В этом случае нахождение пределов интегрирования по переменной  $t$  упрощается:  $\alpha=\psi(a)$ ,  $\beta=\psi(b)$ .

$$\int_0^1 x \cdot (2-x^2)^5 dx$$

Пример. Вычислить

Пусть  $t=2-x^2$ . Тогда  $dt=d(2-x^2)=(2-x^2)'dx=-2xdx$  и  $xdx=-\frac{1}{2}dt$ . Если  $x=0$ , то  $t=2-0^2=2$ , и если  $x=1$ , то  $t=2-1^2=1$ . Следовательно:

$$\int_0^1 x \cdot (2-x^2)^5 dx = \int_2^1 t^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2} \int_2^1 t^5 dt = -\frac{1}{2} \left( \frac{t^6}{6} \Big|_2^1 \right) = -\frac{1}{12} \cdot \left( \frac{1}{6} - \frac{64}{6} \right) = -\frac{1}{12} \cdot \left( \frac{1-64}{6} \right) = \frac{21}{4}$$

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$$

Пример. Вычислить

Воспользуемся заменой переменной  $t=\sqrt{1+3x}$ . Тогда  $x=\frac{t^2-1}{3}$  и  $dx=\frac{2}{3}tdt$ . Если  $x=0$ , то  $t=1$  и, если  $x=5$ , то  $t=4$ . Выполняя замену, получим:

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \frac{2}{9} \int_1^4 (t^2-1)tdt = \frac{2}{9} \left( \frac{t^3}{3} \Big|_1^4 - t^4 \Big|_1^4 \right) = \frac{2}{9} \left( \frac{64-1}{3} - 4+1 \right) = 4$$

### 5.4. Основные вопросы темы..

#### • Закрепление пройденного материала: 25 мин

- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SOUTH KAZAKHSTAN</b><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 77 из 116                                                                                                                                                                                                                                                      |

### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш.Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Что такое определенный интеграл?
2. Какие свойства определенных интегралов вы знаете?
3. Какова формула замены переменной в определенном интеграле?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

### Занятие № 29

#### 5.1. Тема: Методы вычисления определенных интегралов. Метод интегрирования по частям.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:.**
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:.**
- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятий
  - б) определение целей и задач занятия
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов

#### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

**Интегрирование по частям** – метод для решения интегралов от произведения двух элементарных функций. Одна из них легко дифференцируема, а другая интегрируема. Работает техника как для нахождения неопределенных, так и для вычисления определенных интегралов.

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Формула для определенного интеграла:

Рассмотрим на практике примеры решения интегрирования по частям. Обратите внимание ещё раз на то, что под значком интеграла стоит произведение двух функций. Это как признак того, что для решения подойдет данный метод.

$$\int_0^1 x \ln x dx$$

Пример: Вычислить интеграл

Решение: В данном задании имеем интеграл с пределами, а поэтому будем применять формулу для определенного интеграла. Введём обозначения:

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x}, \text{ а за } dv = x dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

Осталось подставить это в формулу:

$$\int_0^1 x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 x dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 x \ln x dx = \frac{1}{4}$$

Ответ:

$$\int_0^1 (x+5) 3^x dx$$

Пример: Вычислить интеграл

Решение: Как и в предыдущем примере разберемся какую функцию без проблем интегрировать, какую дифференцировать. Обратите внимание, что если проинтегрировать  $(x+5)$ , то произойдет автоматическое преобразование этого выражения в единицу, что будет очень удобно в решении. Поэтому поступаем так:

$$u = x + 5 \rightarrow du = dx, dv = 3^x dx \rightarrow v = \frac{3^x}{\ln 3}$$

Теперь все неизвестные функции стали найдены и могут быть поставлены во вторую

$$\int_0^1 (x+5) 3^x dx = (x+5) \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{3^x}{\ln 3} dx =$$

формулу:

$$= \frac{18}{\ln 3} - \frac{5}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} \Big|_0^1 = \frac{13}{\ln 3} - \frac{3}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^2 3} = \frac{13}{\ln 3} - \frac{2}{\ln^2 3}$$

$$\int_0^1 (x+5) 3^x dx = \frac{13}{\ln 3} - \frac{2}{\ln^2 3}$$

Ответ:

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:

|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/>             -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 79 из 116                                                                                                                                                                                                                                                                  |

- Дополнительная:

## 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

### а. Контроль (вопросы, тесты,задачи и тд.) 10 мин

1. Что такое определенный интеграл?
2. Свойства определенного интеграла.
3. Формулы определенного интеграла.
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

## Занятие № 30

### 5.1. Тема: Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока): комбинированный.**

### 5.2. Цель занятия:.

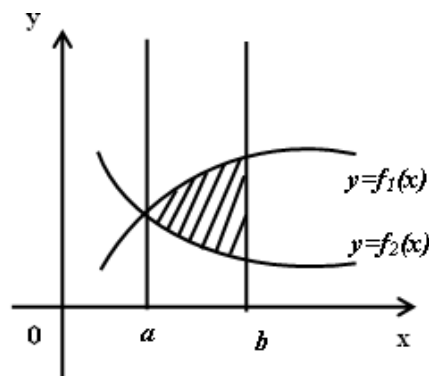
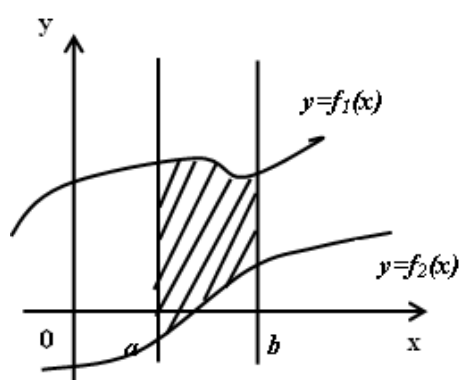
- **образовательная:** научить учащихся вычислять площади фигур с помощью определенного интеграла.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме.

- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятий
  - б) определение целей и задач занятия
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов

### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

Рассмотрим плоскую фигуру CD, представляющую собой множество точек координатной плоскости ху, лежащее в полосе между прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  ( $a < b$ ), имеющее в своем составе точки с абсциссами  $x = a$ ,  $x = b$  и ограниченное сверху и снизу графиками непрерывных на  $[a;b]$  функций  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  таких, что для всех  $x$  из  $[a;b]$  справедливо неравенство  $f_1(x) \geq f_2(x)$



В частности, фигура, изображенная на рисунке 1, ограничена сверху графиком функции  $y = f(x)$ , а снизу – прямой  $y = 0$ . Такая фигура называется криволинейной трапецией.

Площадь  $S$  фигуры  $\Phi$  вычисляется по формуле: 
$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx \quad (1)$$

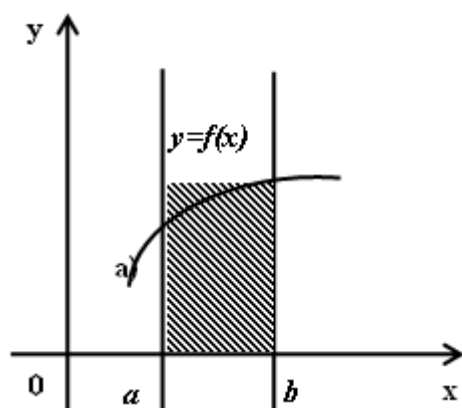


Рис.1

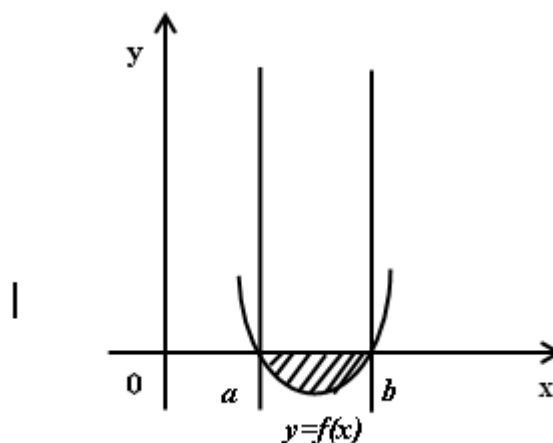


Рис.2

В частности, для криволинейной трапеции изображенной на рисунке 1, получаем:

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

а для криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 2, получаем: 
$$S = - \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

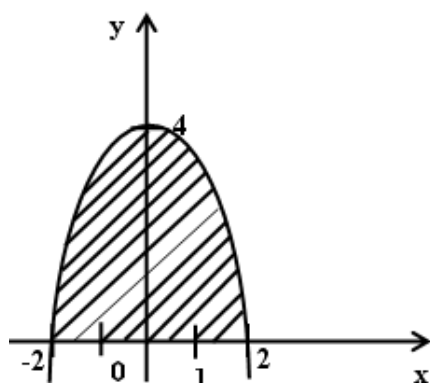


Рис.3

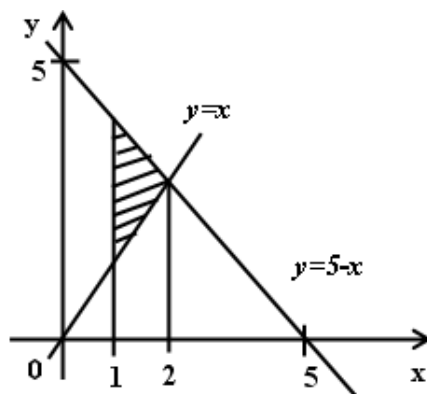


Рис.4

**Пример 1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 0$ .

**Решение:** Фигура, площадь которой надо найти, изображена на рисунке 3.

Воспользовавшись формулой (2), получим:

$$S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 4 \int_{-2}^2 dx - \int_{-2}^2 x^2 dx = 4x \Big|_{-2}^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = 4 \left( 2 - (-2) - \frac{8}{3} - (-\frac{8}{3}) \right) = \frac{32}{3}$$

**Пример 2.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x$ ,  $y = 5 - x$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$

**Решение:** Фигура, площадь которой надо найти, изображена на рисунке 4. По формуле (1), получим:

$$S = \int_1^2 (5 - x - x) dx = \int_1^2 (5 - 2x) dx = 5x - x^2 \Big|_1^2 = 5 \cdot 2 - 2^2 - (5 \cdot 1 - 1^2) = 10 - 4 - 5 + 1 = 2$$

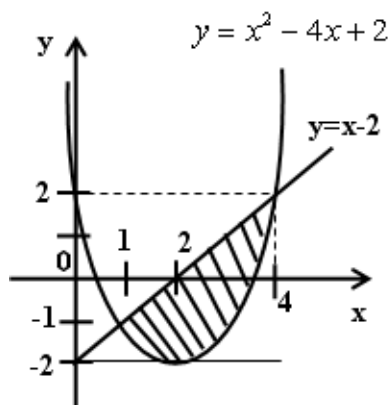


Рис.5

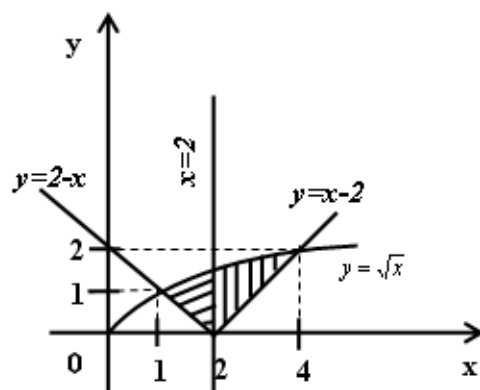


Рис.6

**Пример 3.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x - 2$ ,  $y = x^2 - 4x + 2$

**Решение:** Построив прямую  $y = x - 2$  и параболу  $y = x^2 - 4x + 2$  получим фигуру, площадь которой требуется вычислить (рис. 5).

Значит,  $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$  где  $f_1(x) = x - 2$ ,  $f_2(x) = x^2 - 4x + 2$ , а пределы интегрирования  $a$  и  $b$  суть абсциссы точек пересечения параболы и прямой. Для отыскания этих абсцисс решим уравнение  $f_1(x) = f_2(x)$ , т.е.  $y = x - 2 = x^2 - 4x + 2$ , откуда  $x^2 - 5x + 4 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 4$

$$S = \int_1^4 (x - 2 - (x^2 - 4x + 2)) dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4) dx = 5 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 - \frac{x^3}{3} \Big|_1^4 - 4x \Big|_1^4 = \frac{5}{2} (16 - 1) - \frac{1}{3} (64 - 1) - 4(4 - 1) = 4,5$$

**Пример 1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x - 2$ .

**Решение:** Фигура, площадь которой надо найти, изображены на рисунке 6. Проведем прямую  $x = 2$ . Тогда площадь  $S$  интересующей нас фигуры равна сумме  $S_1 + S_2$ , где  $S_1$ ,  $S_2$  - площади фигур изображенных на рис. 6.

$$S_1 = \int_1^2 (\sqrt{x} - (x - 2)) dx = \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 = \frac{8\sqrt{2} - 7}{6}$$

$$S_2 = \int_2^4 (\sqrt{x} - (x - 2)) dx = \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^4 = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Значит } S = S_1 + S_2 = \frac{8\sqrt{2} - 7}{6} + \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3} = \frac{13}{6}$$

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Какую фигуру называют криволинейной?
2. Что такое определенный интеграл?

|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/>             -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 83 из 116                                                                                                                                                                                                                                                                  |

### Занятие № 31

#### 5.1. Тема: Приближенное вычисление определенного интеграла

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока): комбинированный.**

#### 5.2. Цель занятия:

- **образовательная:** объяснить приближенное вычисление определенного интеграла.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся навыки логического, абстрактного мышления.
- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме

- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятий
  - б) определение целей и задач занятия
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов

#### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

Пусть например, требуется вычислить приближенное значение функции  $f(x)=x^7-2x^6+3x^2-x+3$  в точке  $x=2,02$ . Значение  $f$  в близкой к 2,02 точке  $x_0=2$  находится легко:  $f(2)=13$ .

График  $f$  в окрестности точки 2 близок к прямой  $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$  – касательной к нему в точке с абсциссой 2. Поэтому  $f(2,02) \approx y(2,02)$ .

Имеем  $f'(x)=7x^6-12x^5+6x-1$ ,  $f'(x_0)=f'(2)=75$  и  $f(x) \approx y(x)=13+75 \cdot 0,02=14,5$ .

Вычисления на калькуляторе дают результат  $f(2,02) \approx 14,57995$ .

Вообще для дифференцируемой в точке  $x_0$  функции  $f$  при  $\Delta x$ , мало отличающихся от нуля, ее график близок к касательной (проведенной в точке графика с абсциссой  $x_0$ ), т.е. при малых  $\Delta x$   $f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ . (1)

Если точка  $x_0$  такова, что значения  $f(x_0)$  и  $f'(x_0)$  нетрудно вычислить, то формула (1) позволяет ходить приближенные значения  $f(x)$  при  $x$ , достаточно близких к  $x_0$ .

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень).

М.Просвещение, 2018.

### 1. 5.7. Контроль (вопросы, тесты, задачи и т.д.) 10 мин

1. Свойства первообразной функции.
2. Определенный интеграл.
3. Свойства определенного интеграла.
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

### Занятие № 32

#### 5.1. Тема: Аксиомы стереометрии и простейшие следствия из них

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока): комбинированный.**

#### 5.2. Цель занятия:

- **образовательная:** объяснить аксиомы стереометрии и их следствия; показать расположение двух прямых в пространстве, прямой и плоскости, а также параллельность плоскости.

- **воспитательная:** выработать навыки самостоятельной работы у учащихся.

- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме.

- **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятии
- б) определение целей и задач занятия

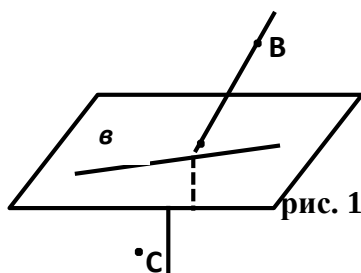
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

#### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

Основными геометрическими фигурами в пространстве являются **точка, прямая и плоскость**. Плоскости обозначаются строчными греческими буквами:  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$



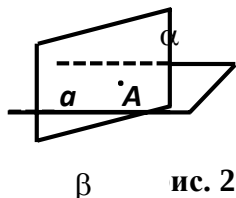
На рисунке 1 изображены плоскость  $\alpha$ , прямые  $a$  и  $b$  и точки  $A, B$  и  $C$ . Про точку  $A$  и прямую  $a$  говорят, что они лежат в плоскости  $\alpha$  или принадлежат ей. Про точки  $B$  и  $C$  и прямую  $b$ , что они не лежат в плоскости  $\alpha$  или не принадлежат ей.

Введение основной геометрической фигуры – плоскости заставляет расширить систему аксиом. Перечислим аксиомы, которые выражают свойства плоскостей в пространстве.

**Аксиома 1.** Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащий этой плоскости, не точки, не принадлежащие ей.

На рисунке 1 точка  $A$  принадлежит плоскости  $\alpha$ , а точки  $B$  и  $C$  не принадлежат ей.

**Аксиома 2.** Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.



На рисунке 2 две различные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  имеют общую точку  $A$ , а значит, по аксиоме 2 существует прямая принадлежащий каждой из этих плоскостей. При этом если какая-либо точка принадлежит обеим плоскостям, то она принадлежит прямой  $a$ . Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  в этом случае называются по прямой  $a$ .

**Аксиома 3.** Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

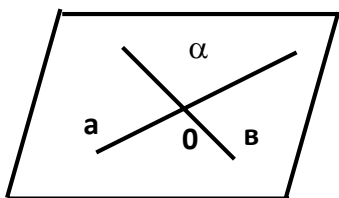


рис. 3

На рисунке 3 изображены две различные прямые  $a$  и  $b$ , имеющие общую точку  $O$ , а значит, по аксиоме 3 существует плоскость  $\alpha$ , содержащая прямые  $a$  и  $b$ . при этом по той же аксиоме 3 плоскость  $\alpha$  единственная.

Пользуясь этими аксиомами, можно доказать несколько первых теорем стереометрии.

**Теорема 1.** Через прямую и не лежащей на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

**Теорема 2.** Если две точки прямой принадлежит плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

**Теорема 3.** Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

**Пример 1.** Дана плоскость  $\alpha$ . Доказать, что существует прямая, не лежащая в плоскости  $\alpha$  и пересекающая ее.

**Решение:** Возьмем в плоскости  $\alpha$  точку  $A$ , что можно сделать по аксиоме 1. По той же аксиоме существует точка  $B$ , которая плоскости  $\alpha$  не принадлежит. Через точки  $AB$  не лежит в плоскости  $\alpha$  и не пересекает ее в точки  $A$ .

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| <div>ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/>MEDISINA<br/>AKADEMIASY<br/>«Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ</div> <div></div> <div>SOUTH KAZAKHSTAN<br/>MEDICAL<br/>ACADEMY<br/>АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»</div> |                |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                                                                                                                                      | 044-73/11-142  |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Стр. 86 из 116 |

- Дополнительная:

## 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш.Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов ЦБ Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

### а. Контроль (вопросы, тесты,задачи и тд.) 10 мин

1. Что изучает наука геометрия ?
2. Какие геометрические фигуры Вы знаете?
3. Какие виды треугольников бывают?
4. Какие виды четырехугольников бывают?
5. Какие формулы применяются для вычисления площади треугольников?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

## Занятие № 33

### 5.1. Тема: Перпендикулярность прямой и плоскости.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

### 5.2. Цель занятия:

- **образовательная:** показать перпендикулярность прямой и плоскости; дать понятие о перпендикуляре и наклонной; показать угол между прямой и плоскостью.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся навыки самостоятельной работы.
- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме.

- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятий
  - б) определение целей и задач занятия
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов

### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой в плоскости, проходящей через точку пересечения данной прямой и плоскости.

**Теорема 1.** Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в это плоскости, проходящим через точку пересечения, то она перпендикулярна плоскости.

Эту теорему называют признаком перпендикулярности прямой и плоскости или теоремой о двух перпендикулярных.

На рисунке 1 изображена прямая  $a$ , перпендикулярная прямым  $c$  и  $d$ , проходящим через точку пересечения плоскости  $\alpha$  и прямой  $a$

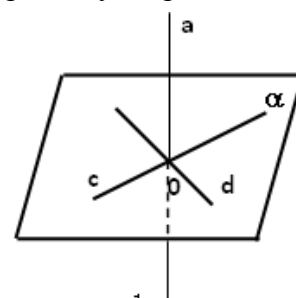


рис. 1

и лежащим в плоскости  $\alpha$ . По теореме 1 можно утверждать, что  $a \perp \alpha$ .

В следующих двух теоремах говорится о взаимосвязи параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

**Теорема 2.** Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

**Теорема 3.** Две прямые, перпендикулярны одной и той же плоскости, параллельны.

На рисунке 2 изображены такие прямые  $a$  и  $b$  и плоскость  $\alpha$ , о которых говорится в теоремах 1 и 2.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость.

На рисунке 3 изображены плоскость  $\alpha$  и прямая  $a$ , которая ее пересекает. Прямая  $a'$  есть проекция прямой  $a$  на плоскость  $\alpha$ .

Тогда угол есть угол между прямой  $a$  и плоскостью  $\alpha$ . Угол между параллельными прямой и плоскостью считается равным нулю, а угол между перпендикулярными прямой и плоскостью – равным  $90^\circ$ . Так как прямая  $a$ , ее проекция  $a'$  на плоскость  $\alpha$  и перпендикуляр к плоскости  $\alpha$  в точке ее пересечения с прямой  $a$  лежат в одной плоскости, то угол между прямой и плоскостью дополняет до  $90^\circ$  угол между этой прямой и перпендикуляром к плоскости.

**Пример 1.** Отрезок длиной 10 см пересекает плоскость причем концы его находятся на расстоянии 3 и 2 см от плоскости. Найти угол между данным отрезком и плоскостью.

**Решение:** Опускаем из точки  $A$  (рис. 4) перпендикуляр  $AE$  на плоскость  $\alpha$  по прямой  $ED$ . Получаем  $\triangle ACE$   $\triangle BCD$ . По условию  $AB=10$  см, поэтому  $BC=10-AC$  и

$$\frac{3}{AC} = \frac{2}{10 - AC} \Rightarrow 30 - AC = 2AC \Rightarrow AC = 6$$

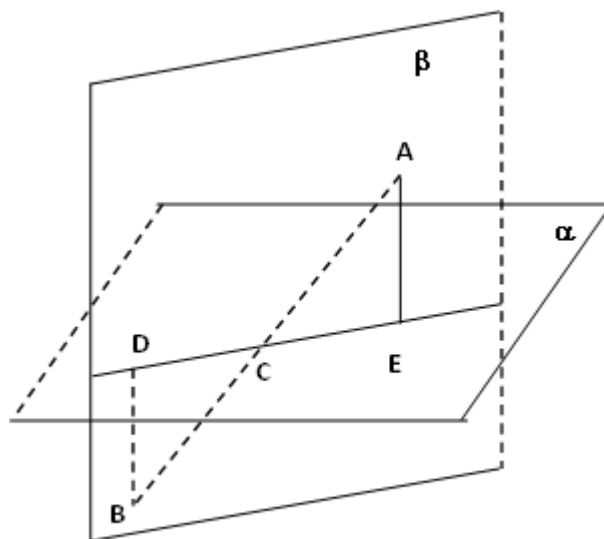


рис. 4

Итак, в  $\triangle ACE$  катет  $AE=3$  см, т.е. равен половине гипотенузы  $AC=6$  см, следовательно, он лежит против угла  $30^\circ$ , откуда  $\angle ACE = 30^\circ$ .

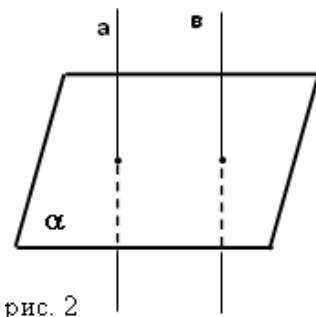


рис. 2

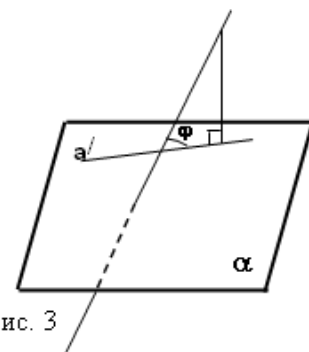


рис. 3

**Теорема 4.** Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны (признак перпендикулярности плоскостей).

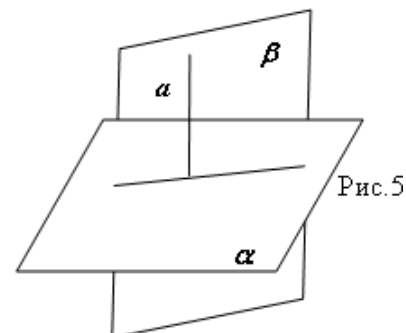
На рисунке 5 плоскость  $\beta$  проходит через прямую  $a \perp \alpha$ , т.е. по теореме 2 плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярны.

**Теорема 5.** Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна их линии пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.

**Пример 2.** Треугольник ABC с прямым углом ACB и катетом AC, принадлежащим плоскости  $\alpha$ , образует с этой плоскостью двугранный угол, равный  $45^\circ$ . Найти расстояние от вершины B до плоскости  $\alpha$ , если  $AC=20$  см и  $AB:BC=3:1$ .

**Решение:** По условию  $AB:BC=3:1$ ,  $AC=20$  см, поэтому обозначив  $BC=x$ ,  $AB=3x$ , по теореме Пифагора из  $\triangle ABC$  получим  $(3x)^2 = 20^2 + x^2$  откуда  $x^2 = 50$ , т.е.  $BC^2 = 50$ .

Из точки B проведем  $BE \perp \alpha$  (рис. 4), соединим E и C. По теореме о трех перпендикулярах  $AC \perp CE$ , так как  $AC \perp BC$ . Следовательно,  $\angle BCE$  - линейный угол двугранного угла, равного по условию  $45^\circ$ . В  $\triangle CBE$  имеем  $\angle BCE = 45^\circ$ ,  $\angle BEC = 90^\circ$ , поэтому  $BE=CE$ , т.е.  $2BE^2 = BC^2$  откуда  $2BE^2 = 50 \Rightarrow BE = 5$  см.



### Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью

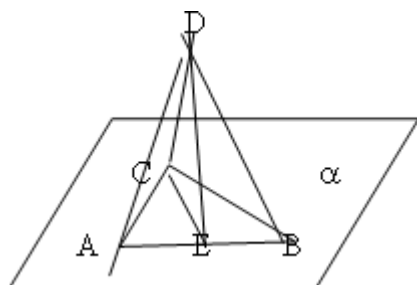
Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием перпендикуляра. Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром к этой плоскости. Конец отрезка лежащий в плоскости, называется основанием наклонной. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной проведенных из одной и той же точки, называется проекцией наклонной.

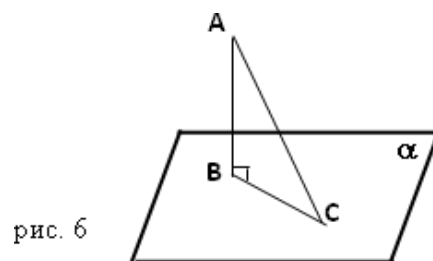
На рисунке 6 из точки A проведены к плоскости  $\alpha$  перпендикуляр AB и наклонная AC. Точка B – основание перпендикуляра, точка C – основание наклонной, BC – проекция наклонной AC на плоскость  $\alpha$ .

**Теорема.** Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной. И обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной (теорема о трех перпендикулярах).

**Пример 1.** Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 15 и 20 см. Из вершины прямого угла C проведен к плоскости этого треугольника перпендикуляр  $CD=35$  см. Найти расстояние от точки D до D гипотенузы AB.



**Решение:** Проведем  $DE \perp AB$ . По условию DC – перпендикуляр к плоскости, т.е. DE – наклонная, CE – ее проекция, поэтому по теореме о трех



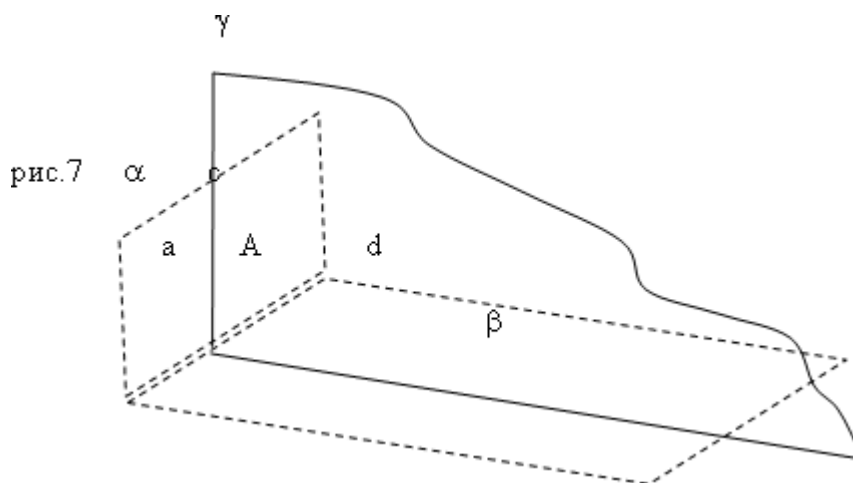
перпендикулярах из условия  $DE \perp AB$  следует, что  $CE \perp AB$ .

Из  $\triangle ABC$  находим  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625}$ , т.е.  $AB=25$  см. Для отыскания высоты  $CE$  в  $\triangle ABC$  находим  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} 20 \text{ см} \cdot 15 \text{ см} = 150 \text{ см}^2$ .

С другой стороны,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CE$ , откуда  $CE = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB}$ , т.е.  $CE=12$  см. Из  $\triangle DEC$

теореме Пифагора  $DE = \sqrt{DC^2 + CE^2}$ , т.е.  $DE=37$  см.

Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если какая-либо плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей пересекает их по перпендикулярным прямым.



На рисунке 7 изображены две плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , которые пересекаются по прямой  $a$ . Плоскость  $\gamma$  перпендикулярна прямой  $a$  и пересекает  $\alpha$  и  $\beta$ . При этом плоскость  $\gamma$  пересекает плоскость  $\beta$  - по прямой  $d$ , причем  $c \perp d$ , т.е. по определению  $\alpha \perp \beta$ .

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

|                                                                                                                          |  |                                                                                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p>  SOUTH KAZAKHSTAN<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                    |  | 044-73/11-142                                                                                                                                                                                         |
| Методические рекомендации                                                                                                |  | Стр. 90 из 116                                                                                                                                                                                        |

**а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и т.д.) 10 мин**

1. Какие плоскости называются параллельными плоскостями?
2. Что такое параллельное проектирование?
3. Что такое угол между прямой и плоскостью?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

**Занятие № 34**

**5.1. Тема: Многогранники.**

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока): комбинированный.**

**5.2. Цель занятия:.**

- **образовательная:** дать понятие о равенстве фигур, о теле и его поверхности; дать описание многограннику, призме и параллелепипеда.

- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.

- **развивающая:** вырабатывать у учащихся пространственное мышление..

- **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятиях
- б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

**5.3. Задачи обучения.**

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

**Равенство фигур. Тело и его поверхности.**

Как на плоскости, так и в пространстве рассматриваются равные фигуры. Фигуры  $F$  и  $F_1$  **называются равными**, если они движением переводятся одна в другую. Для обозначения равенства фигур употребляется знак равенства. Запись  $F=F_1$  означает, что фигура  $F$  равна  $F_1$ .

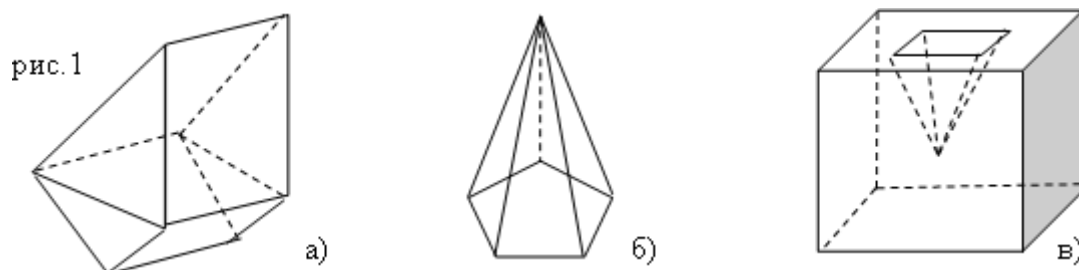
Изучая многоугольники, говорят о плоском многоугольнике, понимая под ним сам многоугольник и его внутреннюю область.

То же самое происходит и в стереометрии. По аналогии с понятием плоского многоугольника вводится понятие тела и его поверхности.

Точка геометрической фигуры называется внутренней, если существует шар с центром в этой точке, целиком принадлежащий этой фигуре. Фигура называется областью, если все ее точки внутренние и если любые две ее точки можно соединить ломаной, целиком принадлежащей фигуре. Точка пространства называется **граничной точкой** данной фигуры, если любой шар с центром в этой точке содержит как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, не принадлежащие ей. Граничные точки области образуют границу области.

Телом называется конечная область вместе с ее границей. Граница тела называется **поверхностью тела**. Тело называется простым, если его можно разбить на конечное число треугольник пирамид.

**Многогранником** называют тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников (рис.1).



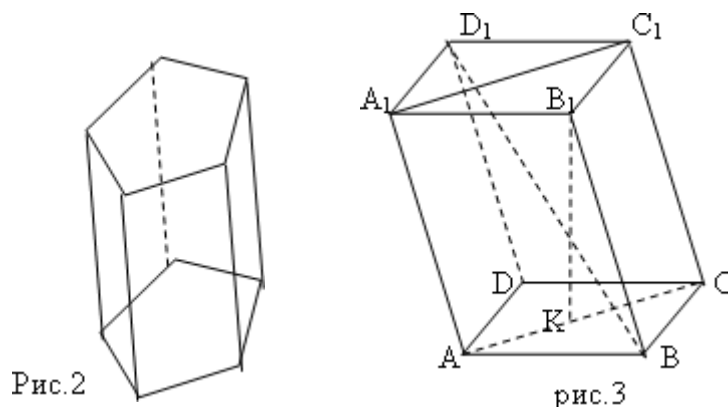
Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону плоскости каждого многоугольника на его поверхности (рис. 1 а, б).

Общая часть такой плоскости и поверхности выпуклого многогранника называется гранью. Грани выпуклого многогранника – **выпуклые многоугольники**. Стороны граней называются ребрами многогранника, а вершины – **вершинами многогранника**.

**Призмой** называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников. Многоугольники называются основаниями призмы, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины – боковыми ребрами призмы (рис 2.).

На рисунке 3 изображена четырехугольная призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Плоские многоугольники  $ABCD$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$  совмещаются соответствующим параллельным переносом и являются основанием призмы, а отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$  являются боковыми ребрами призмы.  $ABCD = A_1 B_1 C_1 D_1$  и  $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ . Боковая поверхность призмы состоит из параллелограммов  $ABB_1 A_1$ ,  $BCC_1 B_1$ ,  $ADD_1 A_1$  и  $DCC_1 D_1$ . Полная поверхность состоит из оснований  $ABCD$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$  и указанных выше параллелограммов.

**Высотой** называется расстояние между плоскостями ее оснований. Отрезок, который соединяет две вершины не принадлежащие одной грани, называется диагональю призмы. **Диагональным сечением** призмы называется сечение ее плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани. Изображенной призмы по рисунку 3  $B_1 K$  – ее высота,  $D_1 B$  – одна из ее диагоналей. Сечение  $ACC_1 A_1$  является одним из диагональных сечений этой призмы.



Призма называется **прямой**, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. В противном случае призма называется наклонной. Прямая призма называется **правильной**, если ее основаниями являются правильные многоугольники.

Если основания призмы – параллелограммы, то она называется **параллелепипедом**. У параллелепипеда все грани параллелограммы. На рис. 3 изображен наклонный параллелепипед.

Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются **противолежащими**. На рис. 3 грани  $ABB_1$  и  $CDC_1D_1$  противоположные.

Можно показать некоторые свойства параллелепипеда.

**Теорема 1.** У параллелепипеда противоположные грани параллельны и равны.

**Теорема 2.** Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется **прямоугольным параллелепипедом**. У прямоугольного параллелепипеда все грани – прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется **кубом**.

### Пирамида. Свойства параллельных сечений в пирамиде. Усеченная пирамида.

**Теорема.** Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то:

- 1) боковые ребра и высота разделяются на пропорциональные части;
- 2) в сечении получится многоугольник, подобный основанию;
- 3) площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины.

Дано:  $SABC$  – треугольная пирамида.  $ABC \parallel A_1B_1C_1$  – сечение пирамиды,  $SO \perp ABC$ .

Доказать: 1)  $\frac{AA_1}{A_1S} = \frac{BB_1}{B_1S} = \frac{CC_1}{C_1S} = \frac{HH_1}{H_1S}$ ; 2)  $ABC \sim A_1B_1C_1$ ;

$$3) \frac{S_{\text{сеч}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{SH^2}{SH^2} = \frac{1}{4}$$

**Доказательство:** 1)  $ABC \parallel A_1B_1C_1$ , поэтому  $A_1B_1 \parallel AB$ ,  $BC \parallel B_1C_1$ ,  $AC \parallel A_1C_1$  по теореме о параллельных плоскостях, пресеченных третьей плоскостью. Следовательно,  $\frac{|AA_1|}{|A_1S|} = \frac{|BB_1|}{|B_1S|} = \frac{|CC_1|}{|C_1S|} = \frac{|BC_1|}{|B_1S|}$ .

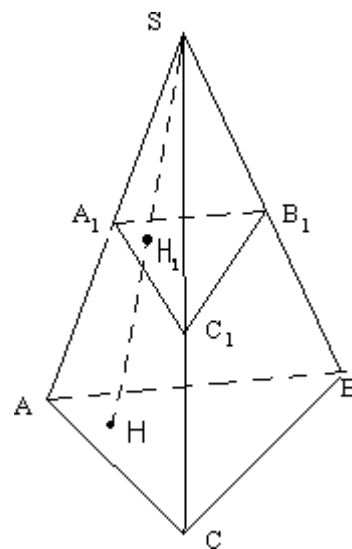
В каждой из этих пропорций имеются попарно одинаковые отношения, поэтому  $\frac{AA_1}{A_1S} = \frac{BB_1}{B_1S} = \frac{CC_1}{C_1S} = \frac{HH_1}{H_1S}$ .

2)  $\triangle ASB \sim \triangle A_1SB_1$ ,  $\triangle B_1SC_1 \sim \triangle BSC$ , Следовательно,  $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1S|}{|BS|}$ ,

$\frac{|B_1S|}{|BS|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|}$ , откуда  $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|}$ , аналогично  $\frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|SB|}{|B_1S|} = \frac{|SC|}{|C_1S|}$ , таким

образом,  $\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|}$ .

3) Соответственные углы треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  конгруэнтны, как углы с



Площади подобных треугольников относятся, как квадраты соответствующих сторон:

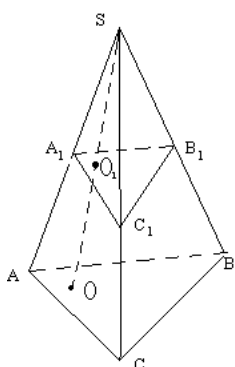
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \left(\frac{|AB|}{|A_1B_1|}\right)^2, \text{ но } \frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|SH|}{|SH_1|}, \text{ следовательно } \frac{S_{ABC}}{S_{осн}} = \left(\frac{SH}{SH_1}\right)^2.$$

Теорема доказана

**Задача.** В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении 2:3 (от вершины к основанию). Найти площадь сечения, зная, что оно меньше площади основания на 84 см<sup>2</sup>.

Дано:  $A_1B_1C_1 \parallel ABC$ ,  $SO_1/O_1O = 2/3$ ,  $S_{осн} - S_{сеч} = 84$  см<sup>2</sup>.

Найти:  $S_{сеч}$ .



**Решение.**

$$\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = \left(\frac{SO_1}{SO}\right)^2 \quad (\text{теорема о сечении, параллельном основанию пирамиды});$$

$$S_{сеч} = x; S_{осн} = x + 84, \text{ тогда из 1) следует } \frac{x}{x + 84} = \left(\frac{SO_1}{SO}\right)^2;$$

$$\frac{x}{x + 84} = \left(\frac{2}{5}\right)^2; \quad \frac{x}{x + 84} = \frac{4}{25}; \quad 25x = 4(x + 84); \quad 21x = 4 \cdot 84; \quad x = 4 \cdot 4 = 16.$$

Ответ:  $S_{сеч} = 16$  см<sup>2</sup>.

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Что такое многогранник? На какие группы делятся многогранники?
2. Какие многогранники называются правильными? Сколько видов правильных

|                                                                                                              |                                                                                   |                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br><b>MEDISINA<br/>         AKADEMIASY</b><br>«Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ |  | SOUTH KAZAKHSTAN<br><b>MEDICAL<br/>         ACADEMY</b><br>АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин<br>Методические рекомендации                                           |                                                                                   | 044-73/11-142<br>Стр. 94 из 116                                                                         |

3. Что такое параллелепипед? Куб?

4. Что такое пирамида? Их виды.

а) оценивание учащихся

б) задание на дом

### Занятие № 35

#### 5.1. Тема: Тела вращения

• **Количество учебных часов: 135 мин**

• **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:

- **образовательная:** дать определение круглым телам и показать их сечения.

- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.

- **развивающая:** вырабатывать у учащихся пространственное мышление.

• **Организационный момент: 10 мин**

а) организация рабочей обстановки на занятии

б) определение целей и задач занятия

• **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

а) проверить уровень базовых знаний студентов.

• **Объяснение новой темы: 40 мин**

**Телом вращения** в простейшем случае называется такое тело, которое плоскостями, перпендикулярными некоторой прямой (оси вращения), пересекается по кругам с центрами на этой прямой. Цилиндр, конус, шар являются примерами тел вращения.

**Цилиндром** (точнее круговым цилиндром) называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих на одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов – основания цилиндров. Круги называются *a* отрезки соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, - образующими цилиндра. На рисунке 1 изображен цилиндр. Круги с центрами  $O$  и  $O_1$  являются его основаниями,  $AA_1$  и  $BB_1$  – его образующие.

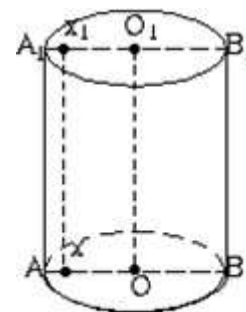


рис 1

Радиусом цилиндра называется радиус его основания. Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований.

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим. На рисунке 1.

Основания цилиндра – равные круги, лежащие в параллельных плоскостях:  $AA_1 \parallel BB_1$  и  $|AA_1| = |BB_1|$ .

$|AO| = |OB|$  - радиусы цилиндра,  $KK_1$  – высота (расстояние между основаниями),  $OO_1$  – ось цилиндра.

Цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований. Если прямоугольник вращать около его стороны, то получается тело вращения – *прямой цилиндр*.

$AA_1B_1B$  – прямоугольник, на рис. 2,  $AB$  – хорда основания. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется осевым сечением. На рис. 3  $AB$  – диаметр основания цилиндра. Сечение на рис.2. называется *осевым* сечением цилиндра.

**Теорема 1.** Плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания (рис. 4).

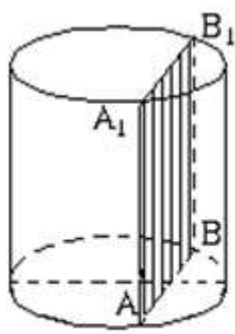


рис 2

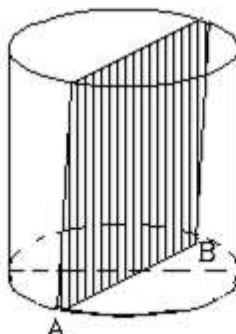


рис 3

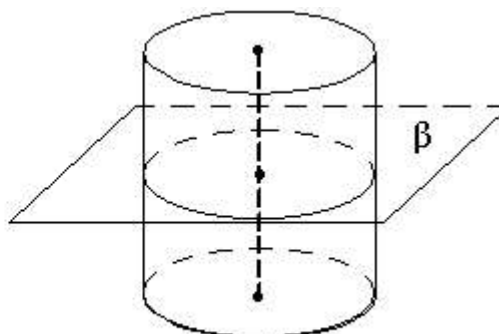


рис 4

**Конусом** (точнее, круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга – *основания конуса*, точки, не лежащей в плоскости этого круга, – *вершины конуса* и всех отрезков, соединяющих *вершину конуса* с точками основания. Отрезки соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются *образующими конуса*. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

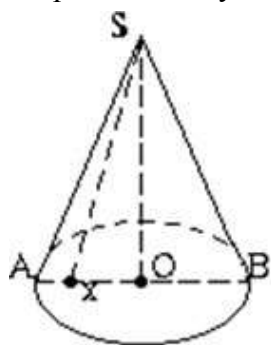


рис.5.

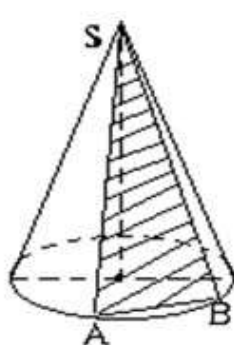


рис.6.

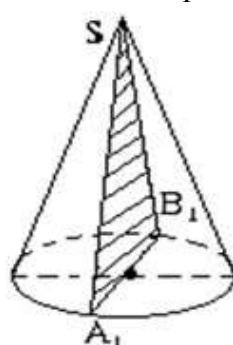


рис.7.

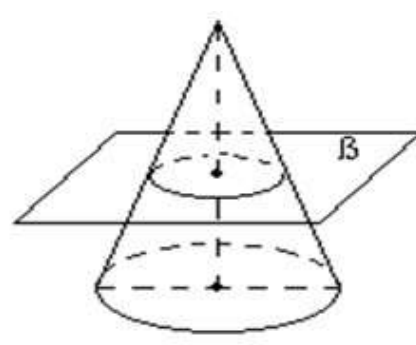


рис.8.

На рисунке 5 изображен круговой конус.  $S$  – вершина конуса, круг с центром в точке  $O$  – основание конуса,  $SA$  и  $SB$  – образующие конуса,  $SO$  – ось кругового конуса.

*Высотой конуса* называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания. Осью прямого конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Сечение конуса плоскостью проходящей через его ось, называется *осевым сечением*.

Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания.  $\triangle ASB$  (рис. 6) – сечения конуса – равнобедренные треугольники,  $\triangle A_1S_1B_1$  – осевое сечение конуса (рис. 7).

**Теорема 2.** Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность – по окружности с центром на оси на оси конуса (рис. 8). Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая конус, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется *усеченным конусом* (рис. 8).

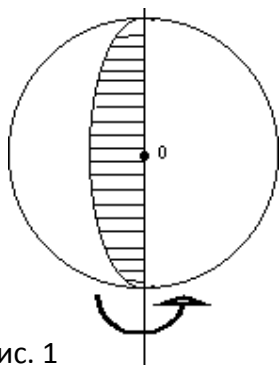


рис. 1

**Шаром** называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не большем данного от данной точки.

Эта точка называется *центром шара*, а данное расстояние *радиусом шара*.

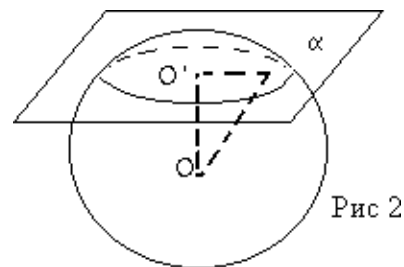
Граница шара называется *шаровой поверхностью*, или *сферой*. Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой

шаровой поверхности, также называется *радиусом*. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметрально противоположным сечением шара*.

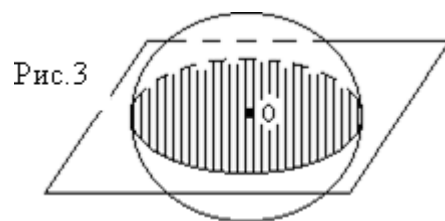
**Шар** – тело вращения, он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра как оси. (рис. 1)

**Теорема 1.** Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Доказательство. Пусть  $\alpha$  – секущая плоскость и  $O$  – центр шара (рис. 2). Опустим перпендикуляр из центра шара на плоскость  $\alpha$  и обозначим основание этого перпендикуляра через  $O'$ .



Пусть  $X$  – произвольная точка шара, принадлежащая плоскости  $\alpha$ . По теореме Пифагора  $OX^2 = OO'^2 + O'X^2$ . Т.к.  $OX$  не больше радиуса шара, то  $O'X \leq \sqrt{R^2 - OO'^2}$ , т.е. любая точка сечения шара плоскостью  $\alpha$  находится от точки  $O'$  на расстоянии, не большем  $\sqrt{R^2 - OO'^2}$ , следовательно, она принадлежит кругу с центром  $O'$  и радиусом  $\sqrt{R^2 - OO'^2}$ .

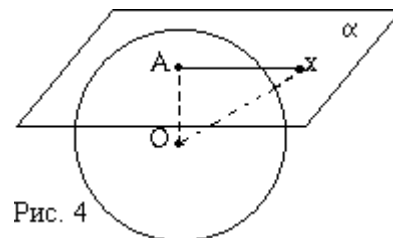


Теорема доказана.

Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной плоскостью*. Сечение шара диаметральной плоскостью называется *большим кругом* (рис. 3), сечение сферы – *большой окружностью*.

**Теорема 2.** Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку – точку касания.

Доказательство. Пусть  $\alpha$  – плоскость, касательная к шару, и  $A$  – точка касания (рис. 4). Возьмем произвольную точку  $x$  плоскости  $\alpha$ , отличную от  $A$ . Т.к.  $OA$  – перпендикуляр, а  $Ox$  – наклонная, то  $Ox > OA = R$ . Следовательно, точка  $x$  не принадлежит шару.



Теорема доказана.

Прямая в касательной плоскости шара, проходящая через точку касания, называется *касательной к шару* в этой точке.

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| <div><div><div>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</div><div>MEDISINA</div><div>AKADEMIASY</div><div>«Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ</div></div><div></div><div><div>SOUTH KAZAKHSTAN</div><div>MEDICAL</div><div>ACADEMY</div><div>АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»</div></div></div> |                |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 044-73/11-142  |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Стр. 97 из 116 |

- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

**а. Контроль (вопросы, тесты,задачи и тд.) 10 мин**

1. Что называют телом вращения?
2. Что такое цилиндр? Какой цилиндр называют прямым?
3. Что такое конус? Что такое усеченный конус?
- 4.Что такое шар? Что называется диаметральной плоскостью?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

**Занятие № 36**

**5.1. Тема:** Площадь поверхности тела

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

**5.2. Цель занятия:.**

- **образовательная:** вывести формулы площадей поверхности призмы, пирамиды, усеченной пирамиды.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся навыки логического, абстрактного мышления.
- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме.

- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятий
  - б) определение целей и задач занятия
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов

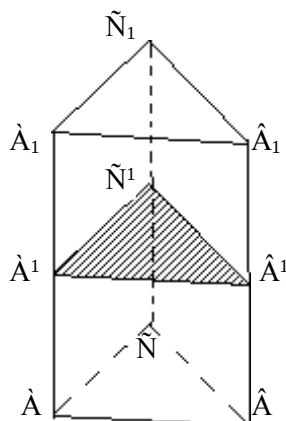
**5.3. Задачи обучения.**

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

*Площадью поверхности* многогранника называется *сумма площадей* всех его граней.

*Площадью боковой поверхности* призмы называется *сумма площадей* всех ее боковых граней. Поверхность призмы часто называют ее *полной поверхностью*. Площадь поверхности призмы равна сумме площадей боковой поверхности призмы и двух ее оснований.

**Теорема 1.** Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на длину бокового ребра призмы, т.е.  $S = p \cdot l$ , где  $P$  – периметр перпендикулярного сечения, а  $l$  – длина бокового ребра.



Доказательство. Пусть  $A^1B^1C^1$  – перпендикулярное сечение призмы, а  $S_1, S_2, S_3$  – площади боковых граней  $ABA_1B_1, BCC_1B_1, CAA_1C_1$ . Так как  $A^1B^1 \perp BB_1$ , то  $BB_1$  – высота параллелограмма  $ABB_1A_1$ . Его площадь  $S_1 = A^1B^1 \cdot BB_1 = A^1B^1 \cdot l$ . Получаем  $S_2 = B^1C^1 \cdot l, S_3 = A^1C^1 \cdot l$ . Следовательно,  $S = S_1 + S_2 + S_3 = (A^1B^1 + B^1C^1 + A^1C^1) \cdot l = p \cdot l$ .

Следствие. Площадь  $S$  боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра  $p$  основания на высоту  $h$  призмы, т.е.

|                                                                                                           |                                                                                   |                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br><b>MEDISINA</b><br><b>AKADEMIASY</b><br>«Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ |  | SOUTH KAZAKHSTAN<br><b>MEDICAL</b><br><b>ACADEMY</b><br>АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин<br>Методические рекомендации                                        |                                                                                   | 044-73/11-142<br>Стр. 98 из 116                                                                      |

$S=rH$ . В случае прямой призмы перпендикулярными сечениями являются ее основания, а длина бокового ребра является высотой призмы, т.е.  $r=P$ ,  $l=H$ .

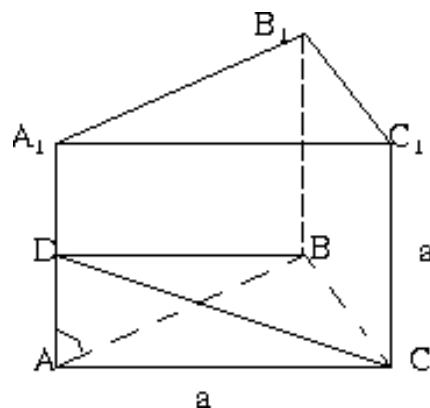
**Задача:** Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно  $a$ , одно из боковых ребер составляет со смежными сторонами основания углы в  $60^\circ$ . Найти площадь поверхности призмы.

Проведем плоскость через вершину  $B$  перпендикулярно ребру  $AA_1$ . Пусть  $D$  – точка пересечения этой плоскости с ребром  $AA_1$ .  $\triangle BDC$  – перпендикулярное сечение призмы. Найдем его периметр:  $P=BD+DC+BC=2BD+BC$ . Так как  $BC=a$ ,

угол  $DAB$  равен  $60^\circ$  и  $BD=AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ , то  $r = \sqrt{3} \cdot a + a$ .

Боковое ребро призмы равно  $a$ , поэтому площадь боковой поверхности  $S=P \cdot l = (\sqrt{3} \cdot a + a) \cdot a$ . Основание призмы – правильные треугольники со стороной  $a$ , поэтому сумма их площадей равна  $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$ . Находим площадь поверхности призмы:

$$Q = S + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \cdot a^2.$$



#### Площадь боковой поверхности цилиндра.

Впишем в цилиндр правильную  $n$ -угольную призму. Площадь боковой поверхности этой призмы  $S_n = P_n H$ , где  $P_n$  – *периметр основания призмы*,  $H$  – ее *высота*.

При неограниченном увеличении  $n$  периметр  $P_n$  неограниченно приближается к длине  $C$  – окружности основания цилиндра. Следовательно, площадь боковой поверхности призмы неограниченно приближается к  $CH$ . Поэтому величина  $CH$  принимается за площадь боковой поверхности цилиндра.

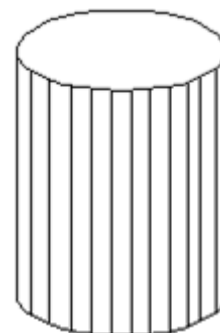
Таким образом, площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле:  $S = CH = 2\pi R H$ , где  $R$  – *радиус цилиндра*, а  $H$  – его *высота*.

#### Площадь боковой поверхности конуса.

Впишем в конус правильную  $n$ -угольную пирамиду. Площадь ее боковой поверхности равна  $S_n = \frac{1}{2} P_n l_n$ , где  $P_n$  – периметр основания пирамиды,  $l_n$  – ее *апофема*.

При неограниченном увеличении  $n$  периметр  $P_n$  неограниченно приближается к длине  $C$  – окружности основания конуса, а апофема к длине образующей. Соответственно, боковая поверхность пирамиды неограниченно приближается к  $C(l/2)$ . В связи с этим величина  $C(l/2)$  принимается за площадь боковой поверхности конуса.

Таким образом, площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле:  $S = \frac{1}{2} CH = \pi R l$ , где  $R$  – *радиус основания конуса*, а  $l$  – *длина образующей*.

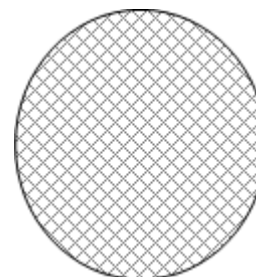


Аналогично, для вычисления боковой поверхности усеченного конуса с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  и образующей  $l$  получается формула:  $S = \pi (R_1 + R_2)l$ .

### Площадь сферы.

Опишем около сферы выпуклый многогранник с малыми гранями.

Пусть  $S'$  - площадь поверхности многогранника, т.е. сумма площадей его граней. Найдем приближенное значение площади поверхности многогранника, предполагая, что линейные размеры граней, т.е. расстояние между любыми двумя точками любой грани, меньше  $\pi$ .



Объем многогранника равен сумме объемов пирамид, имеющих своими основаниями грани многогранника, а вершиной – центр сферы.

Так как все пирамиды имеют одну и ту же высоту, равную радиусу сферы, то объем многогранника:  $V = \frac{1}{3} S' R$ . Объем многогранника больше объема шара, ограниченного

сферой, но меньше объема шара с тем же центром и с радиусом  $R + \pi$ . Таким образом,  $\frac{4}{3} \pi R^3 < \frac{1}{3} S' R < \frac{4}{3} \pi (R + E)^3$ , отсюда:  $4\pi R^2 < S' < 4\pi (R + E)^2 (1 + \frac{E}{R})$ . Площадь поверхности

описанного многогранника при неограниченном уменьшении размеров его граней, т.е. при неограниченном уменьшении  $E$ , стремится к  $4\pi R^2$ . Поэтому величина  $4\pi R^2$  принимается за площадь сферы с радиусом  $R$  и вычисляется по формуле  $S = 4\pi R^2$ . Аналогично определяется площадь сферической части поверхности шарового сектора, т.е. площадь сферического сегмента, для нее получается формула  $S = 2\pi R H$ , где  $H$  – высота сегмента.

### 5.4. Основные вопросы темы..

- Закрепление пройденного материала: 25 мин
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Формула вычисления площади четырехугольника?
2. Формула вычисления площади трапеции?
3. Формула вычисления площади треугольника?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

## Занятие № 37

### 5.1. Тема: Объем тела.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:** дать понятие объема тела.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся пространственное представление, умение логически мыслить.
- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме.
- **Организационный момент: 10 мин**
  - а) организация рабочей обстановки на занятиях
  - б) определение целей и задач занятия
- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**
  - а) проверить уровень базовых знаний студентов

### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

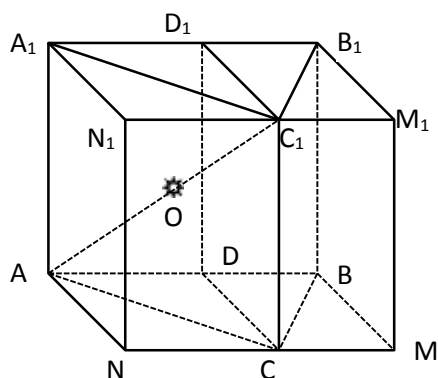
Каждому многограннику  $\Phi$  требуется поставить в соответствие определенную положительную величину  $V$ , называемую объемом, так, чтобы выполнялись следующие свойства:

- единицей измерения объемов является объем куба, длина которого принята за единицу измерения длин;
- конгруэнтные многогранники имеют равные объемы;
- если многогранник является объединением нескольких многогранников, любые два из которых не имеют общих внутренних точек, то объем данного многогранника равен сумме объемов всех таких многогранников.

**Теорема 1.** Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений. ( $V=abc$ )

Доказательство провести по рисунку 57 учебного пособия (лит.основная [1]).

**Теорема 2.** Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту призмы.



Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  – прямая призма.

Доказать:  $V = S_{\triangle ABC} \cdot H$

Доказательство:

Для доказательства проведем  $CD$  – высоту  $\triangle ABC$ . Прямоугольник  $ABMN$   $|BM|=|CD|$  и параллелепипед  $ABMNA_1B_1M_1N_1$ . Грани  $ACC_1A_1$  и  $BCC_1B_1$  и плоскость, проходящая через ребро  $CC_1$  и высоту основания  $CD$ , разбивает на четыре прямые треугольные призмы, среди которых имеются две пары

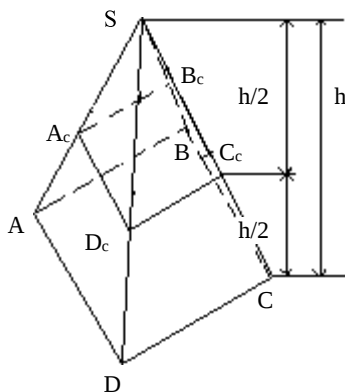
конгруэнтных призм.  $ACDA_1C_1D_1$  и  $ACNA_1C_1N_1$  – конгруэнтные:  $BCD \sim B_1C_1D_1 \sim BCB_1C_1M_1$ .

Согласно свойствам 2 и 3 объем данной треугольной призмы  $V = \frac{1}{2} S_{ABMN} \cdot H = S_{\triangle ABC} \cdot H$ . По рисунку 61 доказать, что  $V = QH$ , где  $Q$  – площадь основания данной призмы,  $H$  – высота.

**Теорема 3.** Объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

Доказательство теоремы провести (объяснить) на моделях многогранника, выполнив чертеж 66 и 65 из учебника [1]. Доказательство записать в тетради вкратце под диктовку.

$$V = S \cdot l = Q \cos \varphi \cdot \frac{H}{\cos \varphi} = QH.$$



**Теорема 4.** Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Дано:  $S$  – площадь основания пирамиды,  $h$  – высота

Доказать:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

Доказательство: Площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной основанию, – квадратная функция расстояния плоскости сечения от вершины, поэтому к пирамиде

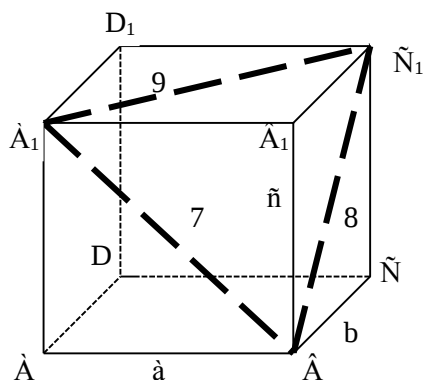
применима формула Симпсона:  $V = \frac{h}{6} (S_H + 4S_C + S_B)$  (1)

$S_H = S$ ,  $S_B = 0$ ; по свойству параллельных сечений пирамиды:  $\frac{S_C}{S} = \frac{(h/2)^2}{h^2} = \frac{1}{4}$ , откуда  $S_C = \frac{1}{4} S$ . Подставив эти значения в формулу (1), получим:

$$V = \frac{h}{6} (S + 4 \cdot \frac{S}{4} + 0) = \frac{h}{6} \cdot 2S = \frac{1}{3} SH.$$

**Теорема 5.** Объем усеченной пирамиды равен:  $V = \frac{h}{3} (S + S_1 + \sqrt{SS_1})$ .

**Задача 1.** Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны 7, 8 и 9 см. Найдите объем параллелепипеда.



Дано:  $AA_1$  – прямоугольный параллелепипед.  $|A_1B| = 7$  см,  $|C_1B| = 8$  см,  $|A_1C_1| = 9$  см.

Найти:  $V = |AB| \cdot |CB| \cdot |BB_1|$ .

Решение. Пусть  $|AB| = a$ ,  $|BC| = b$ ,  $|BB_1| = c$ . Тогда 1) из прямоугольного треугольника  $AA_1B$  по теореме Пифагора имеем:  $49 = a^2 + c^2$ ,  $a^2 = 49 - c^2$ .

Аналогично: 2)  $\triangle BC_1C$   $64 = c^2 + b^2$   $c^2 = 64 - b^2$ .

3)  $\triangle A_1C_1B_1$   $81 = a^2 + b^2$   $a^2 = 81 - b^2$ .

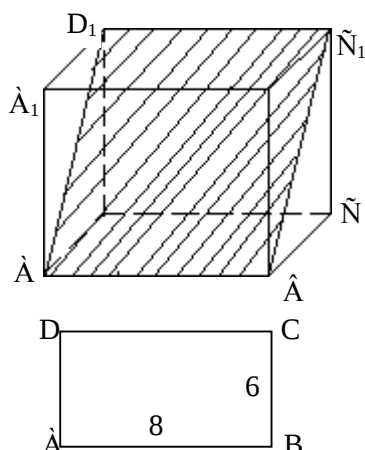
Составим уравнение:  $49 - c^2 = 81 - b^2$ ;  $49 - (64 - b^2) = 81 - b^2$ ;  $49 - 64 + b^2 + b^2 - 81 = 0$ ;  $2b^2 = 96$ ;  $b^2 = 48$ ;  $a^2 = 81 - 48 = 33$ ;  $c^2 = 64 - 48 = 16$ .

4) Вычислим объем параллелепипеда:

$$V = \sqrt{33 \cdot 48 \cdot 16} = \sqrt{3 \cdot 11 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 16} = 3 \cdot 16 \sqrt{11} = 48\sqrt{11}$$

Ответ:  $V = 48\sqrt{11} \text{ см}^3$ .

**Задача 2.** Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 и 8 см, а площадь диагонального сечения  $180 \text{ см}^2$ . Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.



Дано:  $ABCDD_1C_1B_1A_1$  – прямоугольный параллелепипед;

$|AB|=8 \text{ см}$ ,  $|CB|=6 \text{ см}$ ,  $S(AD_1C_1B)=180 \text{ см}^2$ .

Найти:  $S_{\text{пол.}}$

**Решение.**  $S_{\text{пол.}} = 2S_{ABCD} + 2S_{ABB_1A_1} + 2S_{BB_1C_1C}$ .

1) Площадь сечения  $AD_1BC_1$  равна  $180 \text{ см}^2$ , поэтому  $180 = |C_1B| \cdot |AB| = 8 \cdot |C_1B|$ ;  $|C_1B| = 22,5$ .

2) Рассмотрим  $\triangle CC_1B$  – прямоугольный, по теореме Пифагора имеем:  $|CC_1| = \sqrt{|C_1B|^2 - |CB|^2} = \sqrt{506,25 - 36} = 21,7 \text{ (см)}$ .

$$2S_{ABCD} = 2 \cdot 8 \cdot 6 = 96 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$2S_{ABB_1A_1} = 2 \cdot 8 \cdot 21,7 = 347,2 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$2S_{BB_1C_1C} = 2 \cdot 6 \cdot 21,7 = 260,4 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{\text{пол.}} = 96 + 347,2 + 260,4 = 703,6 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ:  $S_{\text{пол.}} = 703,6 \text{ см}^2$ .

**Задача 3.** Площадь осевого сечения равностороннего цилиндра равна  $S$ . Вычислите объем цилиндра.

Дано:  $ABA_1B_1$  – равносторонний цилиндр.  $S_{ABA_1B_1} = S$ .

Вычислить:  $V = \pi R^2 \cdot l = \pi |AO|^2 \cdot |AA_1|$ .

**Решение:** Так как цилиндр равносторонний, то осевое сечение  $ABA_1B_1$  – квадрат, площадь которого  $S$ , значит его сторона равна  $\sqrt{S}$ , радиус цилиндра будет равен  $\sqrt{S}/2$ .

$$\text{Следовательно объем равен: } V = \pi \frac{S}{4} \cdot \sqrt{S} = \frac{S\sqrt{S}}{4} \pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

**Задача 4.** Прямоугольный треугольник с катетом  $a$  и прилежащим углом вращения  $\alpha$  вращается вокруг гипотенузы. Найдите объем тела вращения.

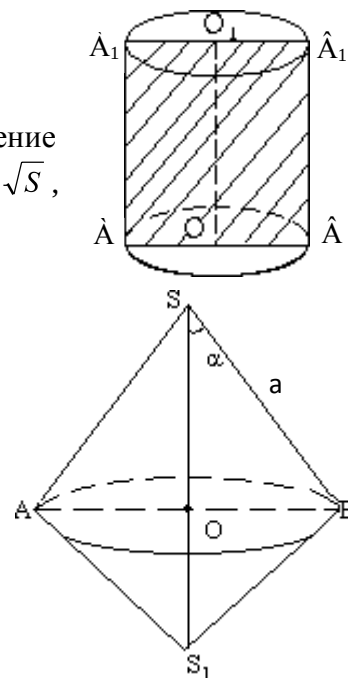
Дано:  $\triangle SBS_1$  – прямоугольный.  $\angle BSS_1 = \alpha$ ,  $|SB| = a$ .

Найти:  $V$  – объем тела вращения.

**Решение:** 1) Так как  $\triangle SBO$  – прямоугольный, то  $|OB| = a \sin \alpha$ ;  $|SO| = a \cos \alpha$ .

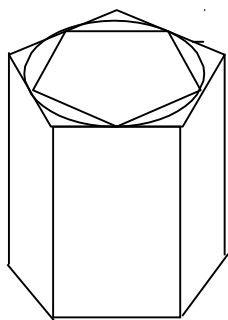
2) Рассмотрим  $\triangle SS_1B$  – прямоугольный (по условию), значит  $|S_1B| = a \tan \alpha$ . Из  $\triangle OBS_1$  найдем  $|OS_1| = \sqrt{|S_1B|^2 - |OB|^2}$  по теореме Пифагора.

$$|OS_1| = \sqrt{\frac{a^2 \tan^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - a^2 \sin^2 \alpha} = \frac{a \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{a \sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha} =$$



$$\begin{aligned}
 3) V_1 &= \frac{1}{3} \cdot |SO| \cdot \pi \cdot |OB|^2 = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot a \cos \alpha \cdot a^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{3} \pi a^3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha. \\
 V_2 &= \frac{1}{3} \cdot |OS_1| \cdot \pi \cdot |OB|^2 = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot a \sin \alpha \cdot a^2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{3} \pi a^3 \sin \alpha \cdot \sin^3 \alpha. \\
 V &= V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \pi a^3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \frac{1}{3} \pi a^3 \sin \alpha \cdot \sin^3 \alpha = \frac{\pi a^3}{3} \left( \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{\sin^4 \alpha}{\cos \alpha} \right) = \\
 &= \frac{\pi a^3}{3} \left( \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{\cos \alpha} \right) = \frac{\pi a^3}{3} \left( \frac{\sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha} \right) = \frac{\pi a^3}{3} \cdot \sin \alpha \cdot \tan^2 \alpha \quad (\text{см}^3). \\
 \text{Ответ: } V &= \frac{\pi a^3}{3} \cdot \sin \alpha \cdot \tan^2 \alpha \quad (\text{см}^3).
 \end{aligned}$$

Если тело простое, т.е. допускает разбиение на конечное число треугольных пирамид, то его объем равен сумме объемов этих пирамид. Для произвольного тела объем определяется следующим образом.



Данное тело имеет объем  $V$ , если существуют содержащие его простые тела и содержащиеся в нем простые тела с объемами, сколь угодно мало отличающиеся от  $V$ .

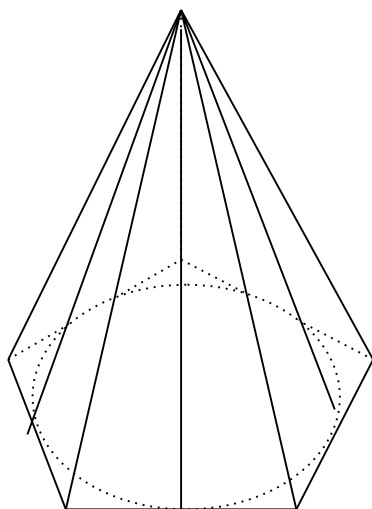
Применим это определение к нахождению объема цилиндра с радиусом основания  $R$  и высотой  $H$ .

Пусть  $P$  – многоугольник, содержащий круг,  $P^1$  – многоугольник, содержащийся в круге. Построим две прямые призмы с основаниями  $P$  и  $P^1$  и высотой  $H$ , равной высоте цилиндра.

Призма  $P$  содержит цилиндр, а  $P^1$  – содержится в цилиндре. Т.к. при неограниченном увеличении  $n$  – площади оснований призм неограниченно приближаются к площади основания цилиндра  $S$ , то их объемы неограниченно приближаются к  $SH$ . Согласно определению объем цилиндра:  $V = SH = \pi R^2 H$ .

Итак, объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

Построим два многоугольника в плоскости основания конуса: многоугольник  $P$ , содержащий основание конуса и многоугольник  $P^1$ , содержащийся в основании конуса. Построим две пирамиды с основаниями  $P$  и  $P^1$  и вершиной в вершине конуса. Первая пирамида содержит конус, а вторая пирамида содержится в конусе.



Существуют такие многоугольники  $P$  и  $P^1$ , площади которых при неограниченном увеличении числа их сторон  $n$  неограниченно приближаются к площади круга в основании конуса. Для таких многоугольников объемы построенных пирамид неограниченно приближаются к  $\frac{1}{3} SH$ , где  $S$  – площадь основания конуса, а  $H$  – его высота. Согласно определению отсюда следует, что объем конуса:  $V = \frac{1}{3} SH = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ .

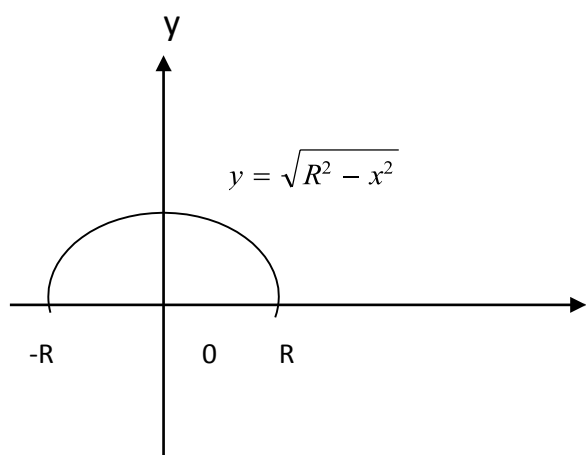
Объем усеченного конуса равен:  $V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + R R + R^2)$ .

$$V = \pi H^2 \left( R - \frac{H}{3} \right), \text{ объем шарового сектора: } V = \frac{2}{3} \pi R^2 H.$$

**Теорема 1.** Объем шара радиуса  $R$  вычисляется по формуле:  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$  (2).

Доказательство: Шар является телом вращения. Он получается вращением вокруг оси  $OX$  криволинейной трапеции, соответствующей функции  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $x \in [-R, R]$ . следовательно, по формуле (1) получим:

$$V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = 2\pi \left( R^2 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$



**Теорема 2.** Объем шарового слоя, радиусы оснований которого равны  $r_1$  и  $r_2$ , а высота равна  $H$ , вычисляется по формуле:  $V = \frac{1}{6} \pi H (3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2)$  (3).

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- Закрепление пройденного материала: 25 мин
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш.Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Что такое объем? Единицы измерения объема.
  2. Формула для вычисления объема пирамиды.
  3. Формула для вычисления объема конуса.
- Формула для вычисления объема шара. а) оценивание учащихся

|                                                                                                                                                                                   |  |                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>         «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ       </p> |  |  <p style="text-align: center;"> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>         АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»       </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                             |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                         |  | Стр. 105 из 116 стр.                                                                                                                                                                                                                                           |

### Занятие № 38

#### 5.1. Тема: Комбинаторика и бином Ньютона

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока): комбинированный.**

#### 5.2. Цель занятия:

- **образовательная:** ознакомить учащихся с элементами теории вероятности математической статистики.

- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.

- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме

- **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятий
- б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

#### 5.3. Задачи обучения.

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

Теория вероятностей изучает закономерности массовых явлений, носящих случайный характер.

Основными понятиями теории вероятностей являются испытание, события и вероятность событий.

Испытанием называется осуществление некоторого определенного комплекса условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз. Испытание может привести или не привести к некоторому исходу, результату. Результат, исход испытания называется событием. Событие обозначают большими буквами латинского алфавита: А, В, С.

События делятся на три группы: достоверные, невозможные, случайные.

Событие называется достоверным, если оно происходит неизбежно в результате каждого испытания.

Например, употребление лекарственного вещества, у которого срок годности не истек, есть достоверное событие. Событие называется невозможным, если в результате каждого испытания оно вовсе не может произойти.

Например, в безлюдном месте не может существовать больница.

Событие называется случайным, если при выполнении ряда известных условий это событие либо произойдет либо не произойдет.

Например, употребление лекарственного вещества, у которого срок годности истек, есть случайное событие. Теория вероятностей исследует эти случайные события. Случайные события делятся на такие группы: совместные, несовместные, равновероятные, единственно вероятные. Если в результате испытания появление одного события не мешает появлению других событий, то такие события называются совместными.

Если в результате испытания появление одного события исключает появление других событий, то такие события называются **несовместными**.

Если событие, получившееся в результате испытания, является достоверным, то это событие называется **единственно вероятным**.

Если в результате испытания появление нескольких событий имеют одинаковые вероятности, то такие события называются **равновероятными**.

|                                                                                                                                                                     |  |                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                               |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                                                                         |
| Методические рекомендации                                                                                                                                           |  | Стр. 106 из 116 стр.                                                                                                                                                                                                                                  |

**Классической вероятностью**  $P(A)$  события  $A$  называется отношение числа  $m$  элементарных событий, благоприятствующих событию  $A$ , к числу  $n$  всех элементарных событий, т.е.  $P(A) = \frac{m}{n}$ .

Из классического определения вероятности следуют ее свойства:

1. Вероятность достоверного события равна единице:  $P(A) = 1$ .
2. Вероятность невозможного события равна нулю:  $P(A) = 0$ .
3. Вероятность любого события  $A$  удовлетворяет двойному неравенству:  $0 \leq P(a) \leq 1$ .

Относительная частота. Статистическое определение вероятности.

Чтобы дать определение относительной частоте рассмотрим такой пример. Нас интересует определенное событие  $A$  из  $n$  испытаний, проведенных в одних и тех же условиях. Если это событие  $A$  осуществилось  $m$  раз, то отношение  $W(A) = \frac{m}{n}$  числа появления события  $A$  к общему числу проведенных испытаний называется **относительной частотой** события  $A$ .

Итак, **статистической вероятностью** события  $A$  в данном испытании, называется число  $P(A)$ , около которого группируются значения относительной частоты при больших  $n$ .

Например, в XVIII веке французским ученым Бюффоном был проделан такой опыт. При бросании монеты 4040 раз, «гербец» выпал 2048 раз, т.е. частота появления «герба» составила  $\frac{2048}{4040} \approx 0,5$ .

Пример №1. Из 100 выстрелов в мишень попало 76 выстрелов. Найти относительную частоту попадания в мишень. Здесь  $m=76$ ,  $n=100$ , следовательно  $W(A) = \frac{76}{100} = 0,76$ .

Пример №2. Из 100 термометров 4 оказались непригодными. Найти относительную частоту появления непригодных термометров. Здесь  $m=4$  и  $n=100$ ,  $\Rightarrow W(A) = \frac{4}{100} = 0,04$ .

Несмотря на внешнее сходство, классическое и статистическое определения вероятности различны по существу. Классическое определение служит для теоретического вычисления вероятности события по заданным условиям опыта и не требует, чтобы испытания проводились в действительности. А статистическое определение служит для экспериментального определения относительной частоты события (предполагается, что испытания были проведены фактически). т. е. вероятность вычисляется до опыта, а частота после опыта.

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- Закрепление пройденного материала: 25 мин
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

1. Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
2. А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.

|                                                                                                            |  |                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p> ONTÜSTİK-QAZAQSTAN<br/> MEDISINA<br/> AKADEMIASY<br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p> SOUTH KAZAKHSTAN<br/> MEDICAL<br/> ACADEMY<br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                      |  | 044-73/11-228                                                                                         |
| Методические рекомендации                                                                                  |  | Стр. 107 из 116 стр.                                                                                  |

- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

**а. Контроль (вопросы, тесты,задачи и тд.) 10 мин**

1. Что такое математическая статистика?
2. Что такое выброчный метод?
3. Что такое классическая вероятность?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

**№2 Рубежный контроль**

1. Найдите производную функции.

- |                                                         |                                                        |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 1. $y = 3\sin x$ ;                                      | 7. $y = \cos x^2$ ;                                    |
| 2. $y = 7.5 - \cos 4x$ ;                                | 8. $y = \sin x^2$ ;                                    |
| 3. $y = 2 \sin^2 x$ ;                                   | 9. $y = \sin x + x^2$ ;                                |
| 4. $y = \operatorname{ctg} 3x - \operatorname{tg} 3x$ ; | 10. $y = 1 - \cos 4x$ ;                                |
| 5. $y = 6 \cos x - 1.2x$ ;                              | 11. $y = 5 \sin^4 \left( \frac{1}{16} x^2 - 1 \right)$ |
| 6. $y = -\sin 2x - \cos 2x$ ;                           | 12. $y = x^2 + 2 \cos x$                               |

2. Найдите экстремум функции:1. у

- (x) =  $2x^3 - x^2 - 4x + 5$
2.  $y(x) = 10 - 12x - x^2$
3.  $y(x) = -3x^2 + 13x - 12$
4.  $y(x) = 4 - 8x - 5x^2$
5.  $y(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$

3. Вычислите:

- |                                                                      |                                       |
|----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\int_1^2 (2x - 3) dx$                                            | 4. $\int_{-1}^2 (1 - 2x - x^2) dx$    |
| 2. $\int_{\frac{1}{2}}^0 (x^3 - 3x) dx$                              | 5. $\int_{-1}^2 (x^2 - 6x + 9) dx$    |
| 3. $\int_1^2 \left( \sqrt[3]{2x} + \sqrt{x} + x + 2x - 1 \right) dx$ | 6. $2 \left( \int_1^2 x dx \right)^3$ |

|                                                                                                                                                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;">             ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>             «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ           </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/>             -1979-<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>             АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»           </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                  |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                              |  | Стр. 108 из 116 стр.                                                                                                                                                                                                                                                            |

### Занятие № 39

**5.1. Тема:** Теория вероятности. Сложение и умножение вероятностей.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

**5.2. Цель занятия:**

- **образовательная:** научить учащихся вычислять вероятности случайных событий используя теоремы сложения и умножения вероятностей.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.
- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме.

- **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятиях
- б) определение целей и задач занятия

- **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

**5.3. Задачи обучения.**

- **Объяснение новой темы: 40 мин**

#### Теорема сложения вероятностей несовместимых событий.

Определение: вероятность наступления одного из двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:  $P(A+B) = P(A) + P(B)$ .

Следствие: вероятность наступления одного из нескольких попарно несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:  $P(A_1+A_2+\dots+A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)$ .

**Пример №3.** Производство выпускает в среднем 21% товаров высшего сорта и 70% товаров первого сорта. Найти вероятность того, что наугад взятый товар будет товаром I сорта, либо высшего сорта.

**Решение:** Пусть  $A$  – товар высшего сорта, а  $B$  – товар I сорта. Соответственно их вероятности:  $P(A)=0,21$  и  $P(B)=0,7$ . События  $A$  и  $B$  несовместимы, т.к. при одном испытании оба события не могут появиться одновременно. Поэтому  $P(A+B)=P(A)+P(B)=0,21+0,7=0,91$ . Итак,  $P(A+B)=0,91$ .

**Пример №4.** Для производственной практики для 30 студентов выделено в Шымкенте 15 мест, в Кустанае – 8 мест, в Актобе – 7 мест. Найти вероятность того, что 2 студента попадут в один город.

**Решение:** выбрать 2 студентов из 30 можно  $C_{30}^2$  - методом, т.е.  $n = C_{30}^2$ . Из 15 студентов выбрать 2 можно методом  $m_1 = C_{15}^2$ ; из 8 студентов выбрать 2 можно методом  $m_2 = C_8^2$ , и из 7 – методом  $m_3 = C_7^2$ . Пусть событие  $A$  – 2 студента попадут в Шымкент, событие  $B$  – 2 студента попадут в Кустанай, событие  $C$  – два студента попадут в Актобе. Тогда вероятности этих событий:

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{C_{15}^2}{C_{30}^2} = \frac{15 \cdot 14}{30 \cdot 29} = \frac{7}{29}; \quad P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{C_8^2}{C_{30}^2} = \frac{8 \cdot 7}{30 \cdot 29} = \frac{28}{15 \cdot 29};$$

$$P(C) = \frac{m_3}{n} = \frac{C_7^2}{C_{30}^2} = \frac{7 \cdot 6}{30 \cdot 29} = \frac{7}{5 \cdot 29}.$$

$A, B, C$  – несовместны события, поэтому:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{7}{29} + \frac{28}{15 \cdot 29} + \frac{7}{5 \cdot 29} = \frac{7}{29} \left( 1 + \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \right) = \frac{7}{29} \cdot \frac{22}{5} = \frac{154}{435} \approx 0,354$$

|                                                                                                           |                                                                                   |                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОҢТҮСТІК-ҚАЗАҚСТАН<br><b>MEDISINA</b><br><b>AKADEMIASY</b><br>«Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ |  | SOUTH KAZAKHSTAN<br><b>MEDICAL</b><br><b>ACADEMY</b><br>АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин<br>Методические рекомендации                                        |                                                                                   | 044-73/11-228<br>Стр. 109 из 116 стр.                                                                |

### 1. Вероятность полной группы событий.

Совокупность единственноверных событий составляет полную группу событий. Иными словами, если при повторном испытании осуществляется хотя бы одно из событий, то эти события составляют полную группу событий.

Теорема: Сумма вероятностей попарно несовместимых событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , образующих полную группу событий, равна единице:  $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$ .

Пример №5. Аптечный склад получает медикаменты с 3-х фармацевтических заводов. Вероятность получения медикаментов с первого завода равна 0,6; со второго – 0,25. Какова вероятность того, что следующая партия медикаментов будет поставлена третьим заводом?

Решение: Событие  $A$  – медикаменты с первого завода;  $B$  – медикаменты со второго завода;  $C$  – медикаменты с третьего завода.  $P(A)=0,6$ ;  $P(B)=0,25$ . События  $A, B, C$  составляют полную группу событий, следовательно их сумма равна единице. Отсюда решение:

$P(C)=1-0,6-0,25=0,15$ , т.е. вероятность  $P(C)$  равна 0,15.

### 2. Противоположные события и их вероятности.

Определение: два события называют *противоположными*, если они несовместны и образуют полную группу. Если событие обозначено через  $A$ , то противоположное событие обозначают через  $\bar{A}$ .

Например: студент сдает экзамен. «Студент сдал экзамен» и «Студент не сдал экзамен» – противоположные события, т.е. событие  $A$  – «сдал экзамен», событие  $\bar{A}$  – «не сдал экзамен».

Теорема: сумма вероятностей противоположных событий равна 1:  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ .

Пусть вероятность появления события  $A$   $P(A)=p$ , вероятность появления события  $\bar{A}$   $P(\bar{A})=q$ . Тогда  $p+q=1$ ,  $q=1-p$ .

Пример №6. На книжной полке лежит 15 книг, из них 5 книг с обложкой. Библиотекарь наугад берет 3 книги. Найти вероятность того, что хотя бы одна из этих 3 книг будет с обложкой.

Решение: Событие  $A$  – хотя бы одна из 3 книг с обложкой. Событие  $\bar{A}$  – все 3 книги без обложки. Эти события противоположны, поэтому  $P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$ .

Таким образом  $P(\bar{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{14 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{4}{14 \cdot 13 \cdot 11} = \frac{4}{2002} = 0,002$ .

Искомая вероятность  $P(A)=p=1-q=1-0,002=0,998$ .

### Зависимые и независимые события.

Определение 1: Если вероятность осуществления события  $A$  не зависит от появления события  $B$ , то событие  $A$  называется *событием, независимым* от  $B$ .

Определение 2: Если вероятность осуществления события  $A$  зависит от того, осуществилось или нет событие  $B$ , то это событие  $A$  называется *событием, зависимым* от  $B$ .

Пример №7. Два стрелка производят выстрел по мишеням. Вероятность попадания в мишень первым стрелком  $P(A)$  не зависит от попадания в мишень вторым стрелком  $P(B)$ . Соответственно, вероятность попадания в мишень вторым стрелком не зависит от попадания в мишень первым стрелком. События  $A$  и  $B$  – независимые события.

Формула полной вероятности.

Пусть события  $B_1, B_2, \dots, B_n$  – несовместны и составляют полную группу событий. И пусть событие  $A$  условно появляется при осуществлении хотя бы одного из событий  $B_1, B_2,$

|                                                                                                                                                      |  |                                                                                                                                                                                                                                             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> ONTÜSTIK-KAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <b>SKMA</b><br/> 1979<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                                                               |
| Методические рекомендации                                                                                                                            |  | Стр. 110 из 116 стр.                                                                                                                                                                                                                        |

...,  $B_n$ . Теперь найдем вероятность события  $A$ .

**Теорема.** Вероятность события  $A$ , которое может осуществиться лишь при условии осуществления одного из несовместных событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события  $A$ :  $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$ .

**Пример №8.** Из 1000 ампул новокаина 400 ампул поступило из первого завода, а остальные из второго. Вероятность качественной ампулы, изготовленной на 1 заводе, равна 0,75; на 2 заводе – 0,80. Найти вероятность того, что наугад взятая ампула окажется качественной.

**Решение:**  $B_1$ -ампула с 1 завода,  $B_2$ -ампула с 2 завода. Событие  $A$ -ампула качественная, т.е.  $P_{B_1}(A)=0,75$ ;  $P_{B_2}(A)=0,80$ ;  $P(B_1)=0,4$ ;  $P(B_2)=0,6$ ;  $P(A)=P(B_1)$ .

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Что такое противоположные события?
2. Что такое зависимые события?
3. Что такое независимые события?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

#### Занятие № 40

#### 5.1. Тема: Случайная величина. Элементы выборочного метода.

- **Количество учебных часов: 135 мин**
- **Вид занятия (тип урока):** комбинированный.

#### 5.2. Цель занятия:.

- **образовательная:** ознакомить учащихся с видами случайных величин и научить методам выборки.
- **воспитательная:** вырабатывать у учащихся такие качества, как аккуратность и умение добиваться определенных результатов собственным трудом.

|                                                                                                                                                                     |  |                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                               |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                                                                         |
| Методические рекомендации                                                                                                                                           |  | Стр. 111 из 116 стр.                                                                                                                                                                                                                                  |

- **развивающая:** научиться решать задачи путем применения полученных знаний по данной теме.

• **Организационный момент: 10 мин**

- а) организация рабочей обстановки на занятиях
- б) определение целей и задач занятия

• **Актуализация опорных знаний по пройденной теме: 20 мин**

- а) проверить уровень базовых знаний студентов

### 5.3. Задачи обучения.

• **Объяснение новой темы: 40 мин**

Величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение (при этом заранее неизвестно, какое именно), называют **случайной**. Примерами случайных величин являются: количество рецептов, поступивших в аптеку в течение рабочего дня, больных в данном районе, продолжительность человеческой жизни и др.

**Случайные величины** обозначают прописными буквами латинского алфавита  $X, Y, Z, \dots$ , а их возможные значения - соответствующими строчными буквами  $x, y, z, \dots$

**Дискретной** (прерывной) называют случайную величину, принимающую отдельные друг от друга возможные значения с определенными вероятностями, которые можно пронумеровать. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным и бесконечным.

**Непрерывной** называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного интервала. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

**Законом распределения дискретной случайной величины** называют соответствие между ее возможными значениями и их вероятностями.

Законом распределения дискретной случайной величины может быть задан в виде таблицы.

|   |       |       |     |       |     |       |     |
|---|-------|-------|-----|-------|-----|-------|-----|
| X | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_i$ | ... | $x_n$ | ... |
| P | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_i$ | ... | $p_n$ | ... |

**Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = \mu = X_1 \cdot P_1 + X_2 \cdot P_2 + \dots + X_n \cdot P_n = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P_i$$

Если случайная величина принимает счетное множество возможных значений, то  $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \cdot P_i$ , причем предполагается, что ряд, находящийся в правой части равенства, сходится абсолютно и сумма вероятностей  $P_i$  равна единице.

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной  $M(C) = C$ .
2. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых  $M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)$
3. Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей  $M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_n)$
4. Математическое ожидание биномиального распределения равно произведению числа равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном

|                                                                                                                                                                                   |  |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"> <small>QNTÜSTIK-QAZAQSTAN</small><br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/>         «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ       </p> |  | <p style="text-align: center;"> <br/> <small>SOUTH KAZAKHSTAN</small><br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/>         АО «Южно-Казахстанская медицинская академия»       </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                             |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                                                                                       |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                         |  | Стр. 112 из 116 стр.                                                                                                                                                                                                                                                |

испытании:  $M(X) = n \cdot M(X_n)$

Характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат, в частности, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

**Дисперсией** случайной величины называют математическое ожидание квадратного отклонения  $D(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{i=1}^n [X_i - M(X)]^2 \cdot P_i$

Дисперсию удобно вычислять по формуле:  $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$

Дисперсия обладает следующими свойствами:

Дисперсия постоянной величины равна нулю  $D(C) = 0$ .

Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии предварительно возведя его в квадрат  $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$ .

Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых  $D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$

Дисперсия биномиального распределения равна произведению числа испытаний на вероятность появления и не появления события в одном испытании:  $D(X) = n \cdot p \cdot q$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

#### 5.4. Основные вопросы темы..

- **Закрепление пройденного материала: 25 мин**
- ответы на вопросы по новой теме;
- решение задач;
- работа с карточками заданий;
- выполнение тестовых заданий.

#### 5.5. Методы обучения и преподавания (малые группы, дискуссии, ситуационные задачи, работа в парах, презентации, кейс-стади и др) 30 мин

- Основная:
- Дополнительная:

#### 5.6. Литература

- 1 Ахметова А. У. Математический анализ : учебное пособие / А. У. Ахметова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 132 с. : ил.
- 2 А.Г. Мордкович, П.В.Семенов. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). М. Мемозина, 2017.
- 3 А.Ш,Алимов, Ю.М.Колягин. Алгебра и начала математического анализа 10-11 кл. Учебник. М. Просвещение, 2018.
- 4 Рахимжанова, С. К. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебно-методическое пособие / С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева. - Алматы : ЭСПИ, 2023. - 188 с
- 5 А.С.Атанасьян, В.Ф.Бутузов Ц,Б Кадонцев. Геометрия (базовой профилный уровень). М.Просвещение, 2018.

#### а. Контроль (вопросы, тесты, задачи и тд.) 10 мин

1. Что такое величина?
2. Что такое случайные величина?
3. Что такое дискретная случайная величина?
4. Какие свойства математического ожидания вы знаете?
  - а) оценивание учащихся
  - б) задание на дом

|                                                                                                                          |  |                                                                                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </p> |  | <p>  SOUTH KAZAKHSTAN<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </p> |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                    |  | 044-73/11-228                                                                                                                                                                                         |
| Методические рекомендации                                                                                                |  | Стр. 113 из 116 стр.                                                                                                                                                                                  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| <div> <div> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </div> <div>  </div> <div> SOUTH KAZAKHSTAN<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </div> </div> |                      |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 044-73/11-228        |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Стр. 114 из 116 стр. |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| <div> <div> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </div> <div>  </div> <div> SOUTH KAZAKHSTAN<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </div> </div> |                      |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 044-73/11-228        |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Стр. 115 из 116 стр. |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| <div> <div> ONTÜSTIK-QAZAQSTAN<br/> <b>MEDISINA</b><br/> <b>AKADEMIASY</b><br/> «Оңтүстік Қазақстан медицина академиясы» АҚ </div> <div>  </div> <div> SOUTH KAZAKHSTAN<br/> <b>MEDICAL</b><br/> <b>ACADEMY</b><br/> АО «Южно-Казахстанская медицинская академия» </div> </div> |                      |
| Кафедра общеобразовательных дисциплин                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 044-73/11-228        |
| Методические рекомендации                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Стр. 116 из 116 стр. |